Курс лекций по математическому анализу
2 курс, 3 семестр, группы ИП, ВИ

1 Функции нескольких переменных

1.1 Понятие n-мерного евклидова пространства. Основные определения

Определение 1
Множество всевозможных упорядоченных совокупностей из n вещественных чисел вида:

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \quad x_i \in R; \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

будем называть n-мерным координатным пространством и обозначать R^n. Каждую отдельную совокупность $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть точкой данного координатного пространства R^n и обозначать $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Числа x_i называются координатами данной точки пространства. Число n называется размерностью данного пространства.

Определение 2
Пространство R^n будем называть *метрическим пространством*, если установлен закон по которому любым двум точкам M_1, M_2 этого пространства ставится в соответствие неотрицательное число $\rho(M_1, M_2) \geqslant 0$, удовлетворяющее трем дополнительным условиям:

- *Невырожденность:* $\rho(M_1, M_2) = 0$, только если $M_1 = M_2$;
- *Симметричность:* $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$;
- *Неравенство треугольника:* $\rho\left(M_1, M_2\right) \leqslant \rho\left(M_1, M_3\right) + \rho\left(M_3, M_2\right)$

Эта величина называется *расстоянием между точками* M_1, M_2, а три условия – *аксиомами расстояния для метрического пространства.*

Определение 3
Координатное пространство R^n с введенным по формуле расстоянием

$$\rho\left(M_1, M_2\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \tag{1.1}$$

между любыми двумя точками данного пространства $M_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $M_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, будем называть n-мерным евклидовым пространством и обозначать E^n.

Теорема 1.1 *Евклидово пространство E^n с расстоянием, введенным по формуле (1.1), является метрическим.*

Доказательство
Первые две аксиомы очевидно выполнены. Для доказательства третьего свойства потребуется неравенство Коши-Буняковского:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

Пусть точки M_1,M_2 и M_3 имеют следующие координаты: $M_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $M_2(y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $M_3(z_1, z_2, \dots, z_n)$, тогда справедливы следующие преобразования:

$$\rho^2\left(M_1, M_2\right) - \rho^2\left(M_1, M_3\right) - \rho^2\left(M_3, M_2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - y_i)^2 - (x_i - z_i)^2 - (z_i - y_i)^2\right] = 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i) \leqslant$$

$$\leqslant 2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2\right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\right]^{1/2} = 2\rho\left(M_1, M_3\right) \cdot \rho\left(M_3, M_2\right).$$

Следовательно,

$$\rho^2\left(M_1, M_2\right) \leqslant \left[\rho\left(M_1, M_3\right) + \rho\left(M_3, M_2\right)\right]^2,$$

что и требовалось доказать, так как расстояние неотрицательно.

Евклидовы пространства E^1,E^2 и E^3 представляют собой прямую, плоскость и трехмерное пространство соответственно с введенными декартовыми (прямоугольными) системами координат и понятием расстояния между точками данных пространств. Приведенные определения позволяют обобщить понятие пространства для произвольного значения размерности n.

Определение 4
Пусть A произвольная точка пространства E^n, $r > 0$ – произвольное положительное число. Множество точек $M \in E^n$ евклидова пространства, удовлетворяющих условию $\rho\left(A, M\right) \leqslant r$ называется *n-мерным шаром* с центром в точке A и радиусом r. Аналогично, множество точек M, удовлетворяющих условию $\rho\left(A, M\right) < r$ называется *открытым n-мерным шаром*, а множество точек E^n, удовлетворяющих условию $\rho\left(A, M\right) = r$ называется *n-мерной сферой.*

Отметим, что для $n = 1$ n-мерный шар представляет собой отрезок (открытый шар – интервал), для $n = 2$ – это круг и лишь для $n = 3$ получаем множество точек, традиционно называемое шаром. Несмотря на это, за такими множествами точек n-мерного пространства исторически закрепилось обобщающее понятие – шар.

Определение 5

Пусть $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ произвольная точка пространства E^n и $d_1, d_2, \ldots, d_n$ – произвольные положительные числа. Множество точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ евклидова пространства, удовлетворяющих условию:

$$|x_1 - a_1| \leqslant d_1;\ |x_2 - a_2| \leqslant d_2;\ \ldots;\ |x_n - a_n| \leqslant d_n$$

называется *n-мерным параллелепипедом* с центром в точке A и длинами ребер (сторон) $2d_1;\ 2d_2;\ \ldots;\ 2d_n$.

Отметим, что для $n = 1$ n-мерный параллелепипед представляет собой отрезок (не отличающийся от одномерного шара соответствующего радиуса), для $n = 2$ – прямоугольник.

Определение 6

Открытый шар радиуса ε с центром в точке A называется ε-окрестностью точки A.

Определение 7

Пусть в пространстве E^n задано некоторое множество точек $D \subseteq E^n$. Точка $M \in D$ называется *внутренней* точкой множества D, если существует ε-окрестность данной точки целиком принадлежащая множеству D (состоящая только из точек множества D).

Точка M (не обязательно принадлежащая множеству D) называется *граничной* точкой множества D, если любая ε-окрестность данной точки M содержит как точки, принадлежащие множеству D, так и точки не принадлежащие множеству D.

Определение 8

Множество D называется *открытым*, если все его точки - внутренние. Множество D называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки. Множество граничных точек данного множества D называется *границей* этого множества и обозначается $\Gamma(D)$.

Определение 9

Точка A (не обязательно принадлежащая множеству D) называется *предельной точкой* множества D, если любая ε-окрестность данной точки содержит точки множества D, отличные от A.

Определение 10

Множество D называется ограниченным, если существует такое $r > 0$, что все точки множества D содержатся в шаре радиуса r с центром в начале координат $O(0, 0, \ldots, 0)$.

Определение 11

Пусть на отрезке $t \in [\alpha, \beta]$ заданы n непрерывных функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$.

В качестве координат точки $M(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ выберем соответствующие значения функций: $x_i = x_i(t);\ i = 1, 2, \ldots, n$. Положение точки M в пространстве зависит от значения параметра t. Будем подчеркивать это, используя обозначение $M(t)$. Множество точек:

$$L = \{M(t) |\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$$

будем называть *непрерывной кривой* в n-мерном пространстве E^n. Точку $A = M(\alpha)$ будем называть начальной точкой кривой, а $B = M(\beta)$ – конечной точкой кривой.

В частности, для двух точек $A(a_1, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, \ldots, b_n)$ отрезком $[A, B]$ будем называть следующее множество точек:

$$[A, B] = \{M(t) |\ x_i(t) = b_i t + a_i(1 - t);\ t \in [0, 1]\}.$$

При этом, значению $t = 0$ соответствует начальная точка отрезка $M(0) = A$, а значению $t = 1$ – конечная $M(1) = B$.

Определение 12

Множество D будем называть *связным*, если любые две точки множества можно соединить кривой, целиком лежащей в множестве D. В противном случае множество будем называть *несвязным.*

Определение 13

Открытое связное множество будем называть *областью.* Замкнутое связное множество – *замкнутой областью.*

Определение 14

Область (замкнутую область) D будем называть *выпуклой,* если для любых двух точек M_1, M_2 из этой области отрезок прямой, соединяющей точки M_1 и M_2 целиком лежит в области D.

Задача 1

Проверить (самостоятельно) являются ли пространства R^n метрическими, если расстояние вводить по одной из формул:

$$\rho\,(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - y_1|; |x_2 - y_2|; \ldots; |x_n - y_n|\},$$

$$\rho\,(M_1, M_2) = \min\{|x_1 - y_1|; |x_2 - y_2|; \ldots; |x_n - y_n|\},$$

$$\rho\,(M_1, M_2) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

Задача 2

Множество D пространства E^1 состоит из следующих точек:

$$D = [0, 1) \cup \{3\}$$

- указать граничные точки множества;

- является ли данное множество замкнутым или открытым;
- является ли точка $x = 1$ предельной точкой множества;
- аналогично – точка $x = 3$.

Решение

В соответствии с определением, граничными являются точки $x = 0, 1, 3$. Так как граничная точка $x = 1$ не принадлежит множеству D, то оно не является замкнутым; с другой стороны, граничные точки $x = 0, 3$ содержатся в D, следовательно, оно и не открытое. Точка $x = 1$ является предельной, а $x = 3$ – нет.

Задача 3

Множество точек $M(x, y) \in D$ пространства E^2 задано неравенством:

$$0 < x^2 + y^2 < 9$$

- указать граничные точки множества;
- является ли данное множество замкнутым или открытым;
- является ли точка $O(0, 0)$ предельной и граничной точкой множества.

Решение

Граничными являются точки $O(0, 0)$ и все точки окружности $x^2 + y^2 = 9$. Данное множество - открытое. Точка $O(0, 0)$ – предельная точка множества.

Задача 4

Является ли ограниченным множество точек $M(x, y)$ пространства E^2 удовлетворяющих неравенству:

$$x^2 - 4xy + 5y^2 < 4.$$

Решение

Преобразуем выражение в левой части неравенства к виду:

$$(x - 2y)^2 + y^2 < 4.$$

Так как оба слагаемых неотрицательны, то каждое из них не превосходит правой части, следовательно:

$$\left\{ \begin{array}{c} |x - 2y| < 2 \\ |y| < 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2 + 2y < x < 2 + 2y \\ -2 < y < 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -6 < x < 6 \\ -2 < y < 2 \end{array} \right.$$

Таким образом, множество точек, удовлетворяющих неравенству, содержится в прямоугольнике с наибольшим ребром $d_y = 12$, следовательно, данное множество – ограничено.

Задача 5

Является ли ограниченным множество точек $M(x, y)$ пространства E^2 удовлетворяющих неравенству:

$$8x^2 + 6xy + y^2 - 2x < 1.$$

Решение

Преобразуем выражение в левой части неравенства к виду:

$$(3x + y)^2 - (x + 1)^2 < 0$$

или

$$|3x + y| < |x + 1|.$$

Раскрываем модуль:

$$-3x - |x + 1| < y < -3x + |x + 1|.$$

Решение этого неравенства существует для любого значения x. Следовательно, хотя бы по одной переменной (x) область не ограничена.

Заметим также, что решением уравнения $|3x + y| = |x + 1|$ являются две прямые $y = -2x + 1$ и $y = -4x - 1$, пересекающиеся в точке $(-1, 3)$. Они делят плоскость на четыре области, две из которых являются решениями неравенства $|3x + y| < |x + 1|$. Каждая из областей – неограничена.

Задача 6

Множество D точек $M(x, y, z)$ пространства E^3 задано неравенствами:

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1;\ x \neq 0$$

- является ли данное множество связным;
- существуют ли связные части множества D.

Решение

Данное множество является трехмерным шаром единичного радиуса, разделенным плоскостью $x = 0$ на два полушария. Любая непрерывная кривая, соединяющая две точки с разными знаками координаты x, в силу непрерывности пройдет через точку $x = 0 \notin D$. Следовательно, множество D не является связным. Каждое из полушарий D – связное множество.

Задача 7

Множество D точек $M(x, y)$ пространства E^2 задано неравенствами:

$$4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4x.$$

Является ли данное множество выпуклым.

Решение

Перепишем двойное неравенство как систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2 & \geqslant & 4 \\ x^2+y^2 & \leqslant & 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 & \geqslant & 4 \\ (x-2)^2+y^2 & \leqslant & 4 \end{cases}$$

Первое неравенство определяет внешнюю часть круга радиуса $R = 2$ с центром в точке $O(0,0)$, а второе – внутреннюю часть круга такого же радиуса, но с центром в точке $A(2,0)$. Точки $M_{1,2}(1, \pm\sqrt{3})$ удовлетворяют обоим неравенствам, в то время, как точка $M(1,0)$, лежащая на отрезке $[M_1, M_2]$ не содержится в области D, так как не удовлетворяет первому неравенству $x^2+y^2 \geqslant 4$. Область не является выпуклой.

1.2 Предел последовательности точек. Основные определения и свойства

Пусть каждому натуральному числу $k \in N$ поставлена в соответствие некоторая точка M_k пространства E^n, тогда говорят, что определена последовательность точек евклидова пространства $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ или, короче, последовательность $\{M_k\}$.

Определение 15

Точка $A \in E^n$ называется пределом последовательности точек $\{M_k\}$, если существует предел:

$$\lim_{k\to\infty} \rho(A, M_k) = 0,$$

т.е., $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что при $k > N(\varepsilon)$ верно неравенство $\rho(A, M_k) < \varepsilon$. В этом случае говорят, что последовательность $\{M_k\}$ сходится к точке A и пишут $\{M_k\} \to A$ при $k \to \infty$ или $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = A$.

Геометрически это означает, что в ε-окрестности точки A содержатся все точки последовательности, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$.

Определение 16

Пусть точка A задана координатами $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и последовательность $\{M_k\}$ состоит из точек с координатами $M_k(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$. Если существуют пределы:

$$\lim_{k\to\infty} \left|x_1^{(k)} - a_1\right| = 0,\ \lim_{k\to\infty} \left|x_2^{(k)} - a_2\right| = 0,\ \ldots\ \lim_{k\to\infty} \left|x_n^{(k)} - a_n\right| = 0,$$

то последовательность $\{M_k\}$ называется *покоординатно* сходящейся к A.

Лемма 1.1 *Сходимость и покоординатная сходимость равносильны.*

Доказательство

Докажем, что из покоординатной сходимости следует просто сходимость. Пусть координатные последовательности $\{x_i^{(k)}\}$ сходятся к a_i при $k \to \infty$, то есть:

$$\left|x_1^{(k)} - a_1\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \text{ при } k > N_1(\varepsilon);$$
$$\left|x_2^{(k)} - a_2\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \text{ при } k > N_2(\varepsilon);$$
$$\dots$$
$$\left|x_n^{(k)} - a_n\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \text{ при } k > N_n(\varepsilon).$$

Обозначим через $N(\varepsilon)$ наибольшее из значений $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$, тогда для $k > N(\varepsilon)$ справедливо следующее неравенство:

$$\rho\left(A, M_k\right) = \sqrt{\left(x_1^{(k)} - a_1\right)^2 + \left(x_2^{(k)} - a_2\right)^2 + \dots + \left(x_n^{(k)} - a_n\right)^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

Таким образом, начиная с $N(\varepsilon)$ все точки последовательности $\{M_k\}$ находятся в ε-окрестности точки A, следовательно последовательность сходится.

Докажем, что из сходимости следует покоординатная сходимость. Пусть последовательность M_k сходится к точке A, тогда для $\forall\varepsilon$, $\exists N(\varepsilon)$ такой, что $\rho\left(A, M_k\right) < \varepsilon$ при $k > N(\varepsilon)$. Для этих значений k оценим разность координат:

$$\left|x_i^{(k)} - a_i\right| = \sqrt{\left(x_i^{(k)} - a_i\right)^2} \leqslant \sqrt{\left(x_1^{(k)} - a_1\right)^2 + \dots + \left(x_n^{(k)} - a_n\right)^2} < \varepsilon.$$

Следовательно, имеет место координатная сходимость. Лемма доказана.

Определение 17

Последовательность $\{M_k\}$ точек n-мерного пространства E^n называется *ограниченной*, если существует шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $O(0, 0, \dots, 0)$ содержащий все точки последовательности, то есть $\forall k$ верно неравенство $\rho\left(O, M_k\right) < r$ и *неограниченной*, если $\forall r > 0$ шар с центром в точке $O(0, 0, \dots, 0)$ и радиусом r не содержит хотя бы одну точку последовательности, то есть $\exists k$ для которого верно неравенство $\rho\left(O, M_k\right) > r$.

Определение 18

Последовательность $\{M_k\}$ точек n-мерного пространства E^n называется *фундаментальной*, если $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\rho\left(M_{k_1}, M_{k_2}\right) < \varepsilon$ для любых $k_1, k_2 > N(\varepsilon)$. То есть все точки фундаментальной последовательности с номерами, большими $N(\varepsilon)$ расположены в ε-окрестности друг от друга (или от любой из них с фиксированным номером большим $N(\varepsilon)$).

Справедливы следующие две теоремы, приводимые без доказательства, которые имеют аналоги в теории функции одной переменной.

Теорема 1.2 *(Критерий Коши) Для того, чтобы последовательность $\{M_k\}$ сходилась необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Теорема 1.3 *(Больцано-Вейерштрасса) Из любой ограниченной последовательности $\{M_k\}$ точек пространства E^n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

1.3 Функция. Предел функции. Основные определения и свойства

Определение 19
Пусть $D = \{M\}$ – множество точек в n-мерном евклидовом пространстве $D \subseteq E^n$. Если каждому значению M из множества D ставится в соответствие (по определенному закону, который для краткости обозначают буквой f) некоторое вещественное число $u \in R$, то говорят, что на множестве D задана *функция $u = f(M)$ с областью определения D*. Величина u в конкретной точке M называется *частным значением функции.* Так как точка n-мерного пространства однозначно определяется координатами $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ то часто используют обозначение $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют *независимыми переменными (аргументами)* функции. Совокупность всех частных значений функции u образует *множество значений* данной функции.

Функции двух и трех переменных в дальнейшем будем обозначать как $u = f(x, y)$ и $u = f(x, y, z)$, а для функций большего числа переменных будем использовать обозначение $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $u = f(M)$.

Определение 20 *(По Коши)*
Пусть на множестве D определена функция $u = f(M)$ и A – предельная точка множества D. Число b называется *пределом* функции $f(M)$ при M стремящемся к A, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(M) - b| < \varepsilon$ для всех точек множества D, удовлетворяющих условию $0 < \rho\,(A, M) < \delta(\varepsilon)$.

Определение 21 *(По Гейне)*
Пусть на множестве D определена функция $u = f(M)$ и A – предельная точка множества D. Число b называется *пределом* функции $f(M)$ при M стремящемся к A, если для любой последовательности точек $\{M_k\}$ сходящейся к A (такой, что $M_k \neq A$) последовательность $\{u_k\}$ значений функции $u_k = f\,(M_k)$ сходится к b.

Используют обозначения $f(M) \to b$ при $M \to A$ или $\lim\limits_{M \to A} f(M) = b$. Если точка A имеет координаты $a_1, \ldots, a_n$, то используются также обозначения:

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \ldots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{(x_1, \ldots, x_n) \to (a_1, \ldots, a_n)} f(x_1, \ldots, x_n) = b.$$

Справедлива следующая теорема, приводимая без доказательства.

Теорема 1.4 *Определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.*

Свойства пределов:

Если существуют пределы функций $\lim\limits_{M \to A} f(M) = b$ и $\lim\limits_{M \to A} g(M) = c$, то:

1. $\exists \lim\limits_{M \to A} (f(M) \pm g(M)) = b \pm c$;
2. $\exists \lim\limits_{M \to A} f(M) \cdot g(M) = b \cdot c$;
3. $\exists \lim\limits_{M \to A} f(M)/g(M)) = b/c$
   если $c \neq 0$; и существует окрестность точки A в которой $g(M) \neq 0$.
4. Если существует предел $\lim\limits_{M \to A} f(M) = b$, то для любой кривой, соединяющей точки M и A, такой, что $M(t) \to A$ при $t \to t_0$, предел $\lim\limits_{t \to t_0} f(M(t))$ (если существует) имеет одинаковое значение b, не зависящее от формы кривой, соединяющей эти точки.

Определение 22

Функция $f(M)$ называется *бесконечно малой* в точке A, если:

$$\exists \lim_{M \to A} f(M) = 0.$$

Функция $f(M)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем $g(M)$, если $f(M)$ и $g(M)$ бесконечномалые и, кроме того:

$$\exists \lim_{M \to A} \frac{f(M)}{g(M)} = 0.$$

Определение 23

Пусть функция $f(M)$ определена в неограниченной области D. Число b называется пределом функции $f(M)$ при $M \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists r(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(M) - b| < \varepsilon$ для всех точек множества D, удовлетворяющих условию $\rho(O, M) > r(\varepsilon)$, где точка $O(0, 0, \ldots, 0)$ – точка начала координат.

Задача 8
Доказать, что функция
$$f(x,y) = 2x + 5y - 4$$
в точке $A(-2,1)$ имеет предел, равный -3.

Решение
Зафиксируем положительное сколь угодно малое число ε. Из неравенства:
$$\rho(A,M) = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} < \delta$$
следует, что $|x+2| < \delta$ и $|y-1| < \delta$. Оценим разность значения функции и предела в окрестности точки A :
$$|f(x,y)+3| = |2x+5y-1| = |2(x+2)+5(y-1)| \leqslant 2|x+2| + 5|y-1| < 7\delta$$
Выберем $\delta = \varepsilon/7$, тогда разность $|f(x,y)+3| < \varepsilon$.

Задача 9
Доказать, что функция
$$f(x,y) = x^2 y$$
в точке $A(-1,3)$ имеет предел, равный 3.

Решение
Зафиксируем положительное сколь угодно малое число ε. Из неравенства $|x+1| < \delta$ следует, что $-1-\delta < x < -1+\delta$, и, так как $\delta > 0$, то $x^2 < (1+\delta)^2$. Аналогично, из $|y-3| < \delta$ следует, что $3-\delta < y < 3+\delta$. Таким образом, при достаточно малых значениях δ для разности $f(x,y)-3$ получаем оценку:
$$|f(x,y)-3| < |(1+\delta)^2(3+\delta)-3| = 7\delta + 5\delta^2 + \delta^3$$
При $\delta \to 0$ это выражение можно сделать меньше любого заданного ε, что означает существование предела. Сделаем грубую оценку данного выражения. Будем считать, что $\delta < 1$, тогда
$$7\delta + 5\delta^2 + \delta^3 = \delta(7+5\delta+\delta^2) < 13\delta.$$
Следовательно, $\delta(\varepsilon)$ можно выбрать, например, таким образом:
$$\delta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\varepsilon}{13}\right\}.$$

Задача 10
Доказать, что функция
$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

не имеет предела в точке $O(0,0)$.

Решение

Пусть точка $M(x,y)$ будет стремиться к точке $O(0,0)$ вдоль прямой $y=kx$, проходящей через точку O, тогда значение функции для точек этой прямой будет равно:

$$f(x,kx)=\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}.$$

Приближаясь к точке O по различным прямым (соответствующим разным значениям k) будем получать разные предельные значения. Следовательно, предела функции в данной точке не существует.

Задача 11

Вычислить предел функции

$$f(x,y)=2x-x^2y^3+\frac{y^4}{x+2y}$$

в точке $A(1,-1)$.

Решение

Используя свойства пределов, легко получить:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)=\lim_{x\to 1}2x\ -\lim_{x\to 1}x^2\lim_{y\to -1}y^3+\frac{\lim\limits_{y\to -1}y^4}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)}(x+2y)}=$$

$$=2-1\cdot(-1)-1=2.$$

Задача 12

Вычислить предел:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\left(1+xy^2\right)^{y/(2x+x^2y)}$$

Решение

Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела, следующим образом:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\left(1+xy^2\right)^{y/\left(2x+x^2y\right)}=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\left[\left(1+xy^2\right)^{1/xy^2}\right]^{y^3/(2+xy)}.$$

Выражение в квадратных скобках имеет вид $(1+t)^{1/t}$ при $t=xy^2\to 0$ и стремится к числу e. Предел показателя степени:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{y^3}{2+xy}=4.$$

Окончательно получаем, что предел функции равен e^4.

Задача 13

Доказать, что функция

$$f(x,y) = (x+2y+1)\sin\left(\frac{\pi}{xy}\right)$$

является бесконечно малой в точке $A(-1,0)$.

Решение

Зафиксируем положительное ε и положим $\delta = \varepsilon/3$. Из неравенства:

$$\rho(A,M) = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} < \delta$$

следует, что $|x+1| < \delta$ и $|y| < \delta$. Оценим значение функции в δ окрестности точки A :

$$|f(x,y) - 0| = |x+2y+1| \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi}{xy}\right)\right| \leqslant |x+1| + 2|y| < 3\delta = \varepsilon$$

Следовательно, предел функции в точке A равен нулю.

Задача 14

Доказать, что функция

$$f(x,y) = \frac{3x-y}{x^2+y^2}$$

является бесконечно малой при $M(x,y) \to \infty$.

Решение

Перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$ и $y = \rho\sin\varphi$. Величина ρ имеет смысл расстояния от точки $M(x,y)$ до начала координат. Модуль разности:

$$|f(\rho,\varphi) - 0| = \left|\frac{3\cos\varphi - \sin\varphi}{\rho}\right| \leqslant \frac{4}{\rho} < \varepsilon$$

при $\rho > 4/\varepsilon$. Следовательно, в качестве $r(\varepsilon)$ можно выбрать $r(\varepsilon) = 4/\varepsilon$.

Задача 15

Доказать, что предел функции

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-x(y-1)}{x^2-xy+y^2}$$

при $M(x,y) \to \infty$ равен 1.

Решение

Рассмотрим модуль разности:

$$|f(x,y) - 1| = \left|\frac{x}{x^2-xy+y^2}\right|.$$

Перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$ и $y = \rho\sin\varphi$:

$$|f(\rho,\varphi) - 1| = \left|\frac{\cos\varphi}{\rho\cdot(1-\sin\varphi\cos\varphi)}\right| \leqslant \frac{1}{\rho\cdot|g(\varphi)|}$$

Здесь

$$g(\varphi) = 1 - \sin\varphi\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\cdot\sin 2\varphi$$

отличная от нуля ограниченная функция

$$\frac{1}{2} \leqslant g(\varphi) \leqslant \frac{3}{2}.$$

Используя минимальное значение функции $\min\{g(\varphi)\} = 1/2$, для модуля разности получим следующую оценку:

$$|f(\rho,\varphi) - 1| \leqslant \frac{2}{\rho} < \varepsilon$$

при $\rho > 2/\varepsilon$. В качестве $r(\varepsilon)$ можно выбрать $r(\varepsilon) = 2/\varepsilon$.

1.4 Повторные пределы функции. Условие равенства предела и повторных пределов

Рассмотрим понятие повторного предела на примере функции двух переменных.

Определение 24

Пусть функция $u = f(x,y)$ определена в прямоугольнике с центром в точке (x_0,y_0) и длинами сторон $2d_1$; $2d_2$ кроме, быть может, отрезков $x = x_0$ и $y = y_0$:

$$Q = \{(x,y):\ 0 < |x - x_0| < d_1;\ 0 < |y - y_0| < d_2\}$$

Для любого фиксированного значения y из множества $0 < |y - y_0| < d_2$ функция $f(x,y)$ является функцией одной переменной x. Пусть теперь для этой функции существует предел при $x \to x_0$ (этот предел, вообще говоря, зависит от значения y):

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y=\mathrm{const}}} f(x,y) = \varphi(y).$$

Пусть, далее, для функции $\varphi(y)$ при $y \to y_0$ существует предел, равный b. Тогда говорят, что для исходной функции $u = f(x,y)$ существует *повторный предел* при $M(x,y) \to M_0(x_0,y_0)$:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = b.$$

При этом, предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$ при фиксированном значении переменной y из области Q называется *внутренним пределом* в повторном. Аналогично определяется и другой повторный предел, который в общем случае может иметь отличное от b значение:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) = c.$$

Его внутренний предел равен $\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$ при фиксированном x из Q.

Справедлива следующая теорема, связывающая понятия предела функции нескольких переменных и повторных пределов.

Теорема 1.5 *Пусть в точке $A(x_0, y_0)$ существует предел функции:*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = b,$$

а также внутренние пределы в повторных $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$ и $\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$, тогда существуют оба повторных предела и они равны b.

Доказательство

Данная теорема очевидно следует из определения предела и повторного предела функции. Так как существуют внутренние пределы в повторных и предел самой функции $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = b$, то последний не зависит от пути стремления $(x,y) \to (x_0,y_0)$. Выберем в качестве такового, например, две смежные стороны прямоугольника с диагональю $M(x,y); A(x_0,y_0)$, то есть $(x,y) \xrightarrow{y \to y_0} (x,y_0) \xrightarrow{x \to x_0} (x_0,y_0)$. Такой путь стремления $M \to A$ соответствует повторному пределу $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$ и его значение в этом случае равно b. Аналогично для второго повторного предела.

Следствия

- из существования и равенства повторных пределов не следует существования предела функции;
- если повторные пределы не равны друг другу, то предела функции в данной точке не существует;
- из существования предела функции не следует существования повторных пределов.

Задача 16

Вычислить повторные пределы при $x \to 0$ $y \to 0$ для функции:

$$f(x,y) = \frac{3x - y}{x + 2y}.$$

Решение

Вычислим первый из повторных пределов:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{3x-y}{x+2y}=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{y}{2y}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Для второго повторного предела получим:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{3x-y}{x+2y}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3.$$

Значения пределов различны.

Задача 17

Вычислить повторные пределы при $x\to 0$ $y\to 0$ для функции:

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Решение

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0;$$
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0.$$

Повторные пределы одинаковы. Однако, предела функции в точке $(0,0)$ не существует (см. задачу 10).

Задача 18

Вычислить повторные пределы при $x\to 0$ $y\to 0$ для функции:

$$f(x,y)=e^{-x^2/y^2}.$$

Решение

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}e^{-x^2/y^2}=\lim_{y\to 0}e^0=1;$$
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}e^{-x^2/y^2}=\lim_{x\to 0}e^{-\infty}=0.$$

Значения повторных пределов различны, следовательно, предела функции в точке $(0,0)$ не существует.

Задача 19

Вычислить повторные пределы при $x\to 0$ $y\to 0$ для функции:

$$f(x,y)=(x+y)\sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Решение

Пусть $x\to 0$ при фиксированном $y\neq 0$, тогда представим функцию в виде суммы двух слагаемых:

$$f(x,y)=x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)+y\sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Первое слагаемое стремится к нулю при $x \to 0$, а во втором – множитель $\sin(\pi/x)$ предела не имеет. Следовательно, внутренний предел в повторном не существует при $y \neq 0$, а значит и сам повторный предел $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ не существует.

Если теперь поменять порядок пределов, то получим при $y \to 0$ функцию $x\sin(\pi/x)$, для которой повторный предел существует:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0.$$

Заметим, что предел данной функции в точке $(0,0)$ существует и равен нулю, что легко показать по аналогии с задачей 13.

1.5 Непрерывность функции нескольких переменных. Равномерная непрерывность

Введем понятие непрерывности для функции нескольких переменных.

Определение 25

Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве D и A – предельная точка этого множества. Функция $f(M)$ называется *непрерывной в точке* A, если существует предел функции $\lim\limits_{M\to A} f(M) = f(A)$. Используется также понятие *непрерывности по совокупности* переменных.

Определение 26

Приращением функции $f(M)$ *в точке* A назовем разность $\Delta u = f(M) - f(A)$. Для этого понятия используется также название *полное приращение.*

Пусть теперь, $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, если ввести приращения каждой переменной: $\Delta x_1 = x_1 - a_1$, $\Delta x_2 = x_2 - a_2$, ... , $\Delta x_n = x_n - a_n$, то условие непрерывности $\lim\limits_{M\to A} f(M) = f(A)$ можно переписать в нескольких эквивалентных формах:

$$\lim_{M\to A}\Delta u = \lim_{(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)\to(0,\ldots,0)}\Delta u = 0.$$

Определение 27

Частным приращением функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ *в точке* $A(a_1,\ldots,a_n)$ по переменной x_k назовем разность

$$\Delta_k u = f(a_1,\ldots,a_k+\Delta x_k,\ldots,a_n) - f(a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_n)$$

Будем называть функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ непрерывной по переменной x_k в точке $A(a_1,\ldots,a_n)$ если при фиксированных остальных переменных функция $f(a_1,\ldots,x_k,\ldots,a_n)$ непрерывна по переменной x_k как функция одной переменной, то есть $\Delta_k u \to 0$ при $\Delta x_k \to 0$.

Справедлива следующая теорема, связывающая понятие непрерывности функции с понятием непрерывности по каждой переменной.

Теорема 1.6 *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в окрестности точки A и непрерывна в этой точке, то она непрерывна по каждой из переменных в точке A.*

Доказательство
Так как функция непрерывна, то $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что:

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)| < \varepsilon$$

для всех точек $M(x_1, \ldots, x_n)$, лежащих в δ-окрестности точки $A(a_1, \ldots, a_n)$. Обозначим точку $M_k(a_1, \ldots, x_k, \ldots, a_n)$, тогда

$$\rho(M_k, A) = |\Delta x_k| \leqslant \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2} < \delta,$$

следовательно, точка M_k лежит в δ-окрестности точки A и разность значений функции $|f(M_k) - f(A)| < \varepsilon$ при $|x_k - a_k| < \delta$. Таким образом, функция непрерывна по переменной x_k.

Определение 28
Функция $f(M)$ называется разрывной в точке A, если она не является непрерывной в этой точке.

Определение 29
Функция $f(M)$ является непрерывной на множестве D, если она непрерывна в каждой точке $M \in D$ этого множества.

Определение 30
Функция $f(M)$ является равномерно непрерывной на множестве D, если все точки этого множества – предельные и $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ такое, что для любых двух точек $M_1, M_2 \in D$ из неравенства $\rho\,(M_1, M_2) < \delta$ следует, что:

$$|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon.$$

Определение 31
Число $\overline{U}$ называется *точной верхней гранью* функции $f(M)$ на множестве $M \in D$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists M \in D$ такое, что $\overline{U} - \varepsilon < f(M) \leqslant \overline{U}$. Аналогично, *точной нижней гранью* называется такое число $\underline{U}$, для которого $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M \in D$ такое, что $\underline{U} \geqslant f(M) > \underline{U} + \varepsilon$. Точные верхняя и нижняя грани обозначаются следующим образом:

$$\overline{U} = \sup_{M \in D} f(M), \quad \underline{U} = \inf_{M \in D} f(M).$$

Теорема 1.7 *Сумма, разность, произведение, частное (если знаменатель отличен от нуля) и суперпозиция двух (и большего числа) непрерывных функций – непрерывная функция.*

Теорема 1.8 *(Первая теорема Вейерштрасса) Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция ограничена на этом множестве*

Теорема 1.9 *(Вторая теорема Вейерштрасса) Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает своих точной верхней и точной нижней граней на этом множестве.*

Теорема 1.10 *(Кантора) Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция равномерно непрерывна на этом множестве.*

Задача 20

Является ли функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & , \text{ если } \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , \text{ если } \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

непрерывной по совокупности аргументов и по каждому аргументу.

Решение

Для точек, отличных от $O(0,0)$ функции x^2, x^3, y^2, y^3 – непрерывны, следовательно, их сумма и разность (так как $x^2+y^2 \neq 0$) непрерывна. Рассмотрим предел функции при $(x,y) \to (0,0)$. Перейдем к полярным координатам:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\rho\left(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi\right) - 0\right| =$$
$$= |\rho(\sin\varphi + \cos\varphi)\,(1 - \sin\varphi\cos\varphi)| \leqslant$$
$$= 2\rho\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) \leqslant 3\rho < \varepsilon,$$

если $\rho < \varepsilon/3$. Таким образом, разность значений функции можно сделать меньше любого заданного числа, если брать точки (x,y) из окрестности точки $(0,0)$ радиуса $\delta = \varepsilon/3$. Функция непрерывна по совокупности и, в соответствии с теоремой 1.6, по каждому аргументу в отдельности.

Задача 21

Является ли функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & , \text{ если } \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , \text{ если } \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

непрерывной по совокупности аргументов и по каждому аргументу.

Решение

Для $x, y \neq 0$ функция непрерывна. При $y = 0$ значение функции $f(x,0) = 0$ и функция также непрерывна по аргументу x, аналогично по y. В то же время, как было показано в задаче 10, предела функции в точке $(0,0)$ не существует, следовательно, функция не является непрерывной по совокупности.

Задача 22

Найти точки разрыва функции

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$$

и определить их характер.

Решение

Если $x+y\neq 0$, то функцию можно преобразовать к виду:

$$f(x,y)=\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}.$$

Так как знаменатель не обращается в нуль нигде, кроме точки $x=0, y=0$, (этот случай рассмотрим отдельно), то функция непрерывна. Точки, лежащие на прямой $x+y=0$ (в том числе и точка O(0,0)), являются точками разрыва. Установим характер разрыва в этих точках. Их координаты имеют вид $A(a,-a)$, где a – произвольное число. Вычисляя предел:

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,-a)}\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}=\frac{2}{3a},$$

видим, что для всех $a\neq 0$ он имеет конечное значение, следовательно, разрыв – устранимый (доопределив функцию в точках $A(a,-a)$ значением $2/3a$ получим непрерывную функцию), для $a=0$, то есть в точке $O(0,0)$ функция имеет неустранимый разрыв.

Задача 23

Используя определение, проверить равномерную непрерывность функции

$$f(x,y)=2y+x-3$$

на плоскости $(x,y)\in R^2$.

Решение

Для произвольного фиксированного $\varepsilon>0$ возьмем две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ отстоящие друг от друга на расстоянии

$$\rho\,(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta.$$

Из последнего неравенства следует, что $|x_1-x_2|<\delta$ и $|y_1-y_2|<\delta$. Разность значений функции в этих точках будет меньше ε:

$$|f\,(M_1)-f\,(M_2)|=|2(y_1-y_2)+(x_1-x_2)|\leqslant$$

$$\leqslant 2\left|y_1 - y_2\right| + \left|x_1 - x_2\right| < 3\delta = \varepsilon$$

при $\delta = \varepsilon/3$. Функция равномерно непрерывна.

Задача 24

Используя определение, проверить равномерную непрерывность функции

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 3}$$

на плоскости $(x,y) \in R^2$.

Решение

Возьмем две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ отстоящие друг от друга на расстоянии меньше δ, что означает: $|x_1 - x_2| < \delta$ и $|y_1 - y_2| < \delta$. Оценим разность значений функции в этих точках:

$$|f(M_1) - f(M_2)| = \left|\frac{1}{x_1^2 + y_1^2 + 3} - \frac{1}{x_2^2 + y_2^2 + 3}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{(x_1^2 + y_1^2 + 3)(x_2^2 + y_2^2 + 3)}\right| < \frac{\delta\left(|x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|\right)}{(x_1^2 + y_1^2 + 3)(x_2^2 + y_2^2 + 3)}.$$

Наибольшее значение функция $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + a^2}$ (считаем $a > 0$) достигает в точке $x = \pm a$ и равно $g_{max} = 1/2a$. Используя этот факт и симметрию выражения по переменным $x_{1,2}$ и $y_{1,2}$, получим оценку для разности значений функции:

$$|f(M_1) - f(M_2)| < \frac{4\delta|x_1|}{(x_1^2 + y_1^2 + 3)(x_2^2 + y_2^2 + 3)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\delta}{2\sqrt{y_1^2 + 3}\,(x_2^2 + y_2^2 + 3)} < \frac{2\delta}{3 \cdot 3} = \frac{2\delta}{9} = \varepsilon$$

при $\delta = 9\varepsilon/2$. Таким образом, для двух произвольных точек M_1 и M_2, удовлетворяющих условию близости $\rho(M_1, M_2) < \delta$, разность значений функции $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$ при условии, что $\delta = 9\varepsilon/2$. Функция равномерно непрерывна.

Задача 25

Является ли функция

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^2}$$

равномерно непрерывной на области $D:\ 0 < x^2 + y^2 \leqslant 4$.

Решение

Область D – ограничена, но не является замкнутой, поэтому прямое использование теоремы Кантора не возможно. Функция $f(x,y)$ непрерывна во всех точках кроме $O(0,0)$. Как легко доказать, предел функции

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Если доопределить функцию $f(x,y)$ значением $f(0,0) = 0$, то она будет непрерывной на множестве $D^*: \; x^2 + y^2 \leqslant 4$. По теореме Кантора такая функция равномерно непрерывна на замкнутой области D^*, а значит она равномерно непрерывна и в $D \subset D^*$.

2 Дифференцирование функции нескольких переменных

2.1 Частные производные и дифференциал функции нескольких переменных

Определение 32

Пусть функция $f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в области D и A, M_k – две внутренние точки этого множества $A(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$, $M_k(a_1, \ldots, a_k + \Delta x_k, \ldots, a_n)$. Частное приращение функции имеет вид $\Delta_k f = f(M_k) - f(A)$. Если существует предел отношения: $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_k f}{\Delta x_k}$, то он называется *частной производной* по переменной x_k в точке A и обозначается следующим образом:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Выше была определена производная для внутренних точек области D. Если A – граничная точка, то есть $A \in \Gamma\{D\}$, то точка M_k в общем случае может и не принадлежать множеству D. Функция в этой точке может быть не определена. Будем понимать под частной производной по переменной x_k в случае граничной точки предельное значение $\partial f / \partial x_k(M)$ частной производной во внутренней точке множества D при условии, что $M \to A$.

Так как определение частной производной ничем в принципе не отличается от определения производной для фукции одной переменной (если полагать, что остальные переменные имеют фиксированные значения), то все правила дифференцирования для частных производных имеют такой же вид, что и для производной функции одной переменной. Геометрический смысл частной производной это скорость изменения функции в направлении оси переменной x_i.

Определение 33

Пусть функция $f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в области D и A, M –

две внутренние точки этого множества $A(a_1, \dots, a_n)$, $M(x_1, \dots, x_n)$. Приращения по каждому из аргументов малы и равны $\Delta x_1 = x_1 - a_1$, $\dots$, $\Delta x_n = x_n - a_n$. Если полное приращение функции $\Delta f = f(M) - f(A)$ при малых Δx_i можно представить в виде суммы:

$$\Delta f = B_1 \Delta x_1 + \dots + B_n \Delta x_n + o(\Delta \rho),$$

где $o(\Delta \rho)$ – бесконечно малая более высокого порядка чем первый по $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$, то *главная (линейная) часть приращения* функции называется *дифференциалом функции* и обозначается:

$$df = B_1 dx_1 + \dots + B_n dx_n.$$

Заметим, что B_i не зависят от всех $\{\Delta x\}$ и зависят (в общем случае) от координат точки A. В правой части равенства дифференциала (для симметрии обозначений) вместо Δx пишут dx, подразумевая, что эти величины по сути одно и то же. Обозначение dx называется дифференциалом независимой переменной и используется также для подчеркивания бесконечной малости приращения, в то время, как Δx – конечно. Если функция имеет дифференциал в точке A, то она называется *дифференцируемой* в этой точке.

Справедливы следующие теоремы, связывающие понятие дифференцируемости с непрерывностью функции в точке и с существованием частных производных в точке.

Теорема 2.1 *Пусть функция $f(M)$ определена в области D и A – внутренняя точка этого множества, тогда, если функция дифференцируема в точке A, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство

Так как функция дифференцируема в A, то для двух точек $A(a_1, \dots, a_n)$ и $M(a_1 + \Delta x_1, \dots, a_n + \Delta x_n)$ справедливо представление приращения функции в виде:

$$\Delta f = B_1 \Delta x_1 + \dots + B_n \Delta x_n + o(\Delta \rho),$$

следовательно, при $\Delta x_i \to 0$ точка M стремится к A, приращение функции $\Delta f \to 0$ и функция непрерывна.

Теорема 2.2 *(Необходимое условие дифференцируемости) Пусть функция $f(M)$ определена в области D и A – внутренняя точка этого множества, тогда, если функция дифференцируема в точке A, то в ней существуют все частные производные и для дифференциала функции справедливо следующее представление:*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n.$$

Доказательство
Если функция дифференцируема в точке A, то для приращения справедливо разложение вида:

$$\Delta f = B_1 \Delta x_1 + \cdots + B_n \Delta x_n + o(\Delta \rho),$$

Положим все $\Delta x_i = 0$, кроме $\Delta x_1 \neq 0$. Приращение функции будет равно в этом случае частному приращению $\Delta_1 f$ по пpеременной x_1, а $\Delta \rho = |\Delta x_1|$, то есть

$$\Delta_1 f = B_1 \Delta x_1 + o(\Delta x_1).$$

Делим это равенство на $\Delta x_1 \to 0$, получаем:

$$\frac{\Delta_1 f}{\Delta x_1} = B_1 + \frac{o(\Delta x_1)}{\Delta x_1} \to B_1$$

при $\Delta x_1 \to 0$. Следовательно, частная производная $\partial f / \partial x_1$ существует и равна B_1. Аналогично доказывается существование и равенство для остальных частных производных. Подставляем полученные значения B_i в дифференциал и имеем необходимое представление:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n.$$

Теорема доказана.

Приведем также (без доказательства) еще одну теорему – достаточное условие дифференцируемости функции.

Теорема 2.3 *(Достаточное условие дифференцируемости) Пусть функция $f(M)$ определена в области D и A – внутренняя точка этого множества, тогда, если в окрестности точки A существуют все частные производные функции и они непрерывны в самой точке A то функция дифференцируема в этой точке.*

Заметим, что, так как производные элементарных функций – элементарные функции и все они непрерывны на области определения, то из теоремы следует, что элементарные функции дифференцируемы на общей части области определения функции и области определения всех частных производных.

Задача 26
Используя определение, вычислить производную функции

$$f(x, y) = x^2 y - xy^3 + 4y^2$$

по переменной x.

Решение

Найдем частное приращение функции в двух точках (x, y) и $(x+\Delta x, y)$:

$$\Delta_x f = \left((x+\Delta x)^2 y - (x+\Delta x) y^3 + 4y^2\right) - \left(x^2 y - x y^3 + 4y^2\right) =$$

$$= 2xy\Delta x + y\,(\Delta x)^2 - y^3 \Delta x$$

и предел отношения:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2xy + y\Delta x - y^3\right) = 2xy - y^3.$$

Заметим, что аналогичный результат может быть получен с использованием правил дифференцирования по x с учетом того факта, что $y = \mathrm{const}$.

Задача 27

Используя определение, вычислить производную функции

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

по переменной y в точке $A(0, 1)$.

Решение

Область определения функции $D : x^2 + y^2 \leqslant 1$. Точка $A(0, 1)$ – граничная точка области D. Точка $M_2(0, 1+\Delta y)$ принадлежит множеству D только, если $\Delta y < 0$ (внутренняя точка круга). Приращение функции

$$\Delta_y f = \sqrt{1 - 0 - (1+\Delta y)^2} - 0 = \sqrt{-2\Delta y - (\Delta y)^2}.$$

Вычисляем предел для частной производной по y:

$$\lim_{\Delta y \to -0} \frac{\sqrt{-2\Delta y - (\Delta y)^2}}{\Delta y} = \lim_{|\Delta y| \to +0} - \sqrt{\frac{2}{|\Delta y|} - 1} = -\infty.$$

Таким образом, частной производной в данной точке не существует.

Задача 28

Вычислить производные функции

$$f(x, y) = x^y - \sin\left(3x + y^2\right)$$

по переменной x и y.

Решение

При вычислении производной по x считаем переменную y постоянной:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} - \cos\left(3x + y^2\right) \cdot 3.$$

Аналогично, вычисляем производную по y, при фиксированном x:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln y - \cos\left(3x + y^2\right) \cdot 2y.$$

Задача 29

Частная производная функции по x равна:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin x + xy.$$

Найти функцию, если известно, что $f(0, y) = y^2$.

Решение

Находим первообразную по переменной x с учетом возможной "постоянной" интегрирования (зависящей от y)

$$f(x, y) = -\cos x + \frac{x^2 y}{2} + C(y).$$

Значение $C(y)$ находим из дополнительного условия:

$$f(0, y) = -1 + C(y) = y^2.$$

Следовательно, $C(y) = 1 + y^2$ и функция имеет вид:

$$f(x, y) = 1 - \cos x + \frac{x^2 y}{2} + y^2.$$

Задача 30

Используя определение, найти дифференциал функции

$$f(x, y) = x^2 y$$

в точке (x, y) и в точке $A(1, 2)$.

Решение

Рассмотрим приращение функции в двух близких точках $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ и (x, y) :

$$\Delta f = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - x^2 y.$$

Раскроем скобки и приведем подобные:

$$\Delta f = \left(2xy\Delta x + x^2 \Delta y\right) + 2x\Delta x\Delta y + y(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2 \Delta y.$$

Линейная часть приращения состоит из первых двух слагаемых (выделена скобками). Остальные слагаемые имеют порядок больше, чем 1. Так как $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, то $\Delta x = \Delta\rho\cos\varphi$ и $\Delta y = \Delta\rho\sin\varphi$, следовательно, например третье слагаемое имеет второй порядок по переменной $\Delta\rho$, а последнее – вообще третий порядок. Дифференциал функции в произвольной точке (x, y) имеет вид:

$$df = 2xy \cdot dx + x^2 \cdot dy,$$

а в точке $A(1, 2)$: $df = 4dx + dy$. Функция дифференцируема в любой точке плоскости.

Задача 31

Используя определение, найти дифференциал функции

$$f(x, y) = \frac{2x}{y}$$

в точке (x, y) и в точке $A(1, 2)$.

Решение

Область определения функции $y \neq 0$. Рассмотрим приращение функции в двух близких точках $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ и (x, y) (считаем $y + \Delta y \neq 0$ и $y \neq 0$):

$$\Delta f = 2(x + \Delta x) \cdot \frac{1}{y + \Delta y} - \frac{2x}{y}.$$

Дробь $1/(y + \Delta y)$ разложим с использованием формулы для суммы бесконечной геометрической прогрессии ($|\Delta y| < |y|$):

$$\frac{1}{y + \Delta y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{1 - (-\Delta y/y)} = \frac{1}{y} \cdot \left[1 - \frac{\Delta y}{y} + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 - \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^3 + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\Delta y + \frac{1}{y^2}(\Delta y)^2 - \frac{1}{y^4}(\Delta y)^3 + \ldots$$

Для приращения функции получим бесконечное разложение по степеням Δx и Δy. Выпишем несколько первых членов этого разложения:

$$\Delta f = \frac{2}{y}\Delta x - \frac{2x}{y^2}\Delta y + \frac{2x}{y^3}(\Delta y)^2 - \frac{2}{y^2}\Delta x \Delta y + \ldots$$

Дифференциал этой функции имеет вид:

$$df = \frac{2}{y} \cdot dx - \frac{2x}{y^2} \cdot dy.$$

Функция дифференцируема в любой точке плоскости, кроме прямой $y = 0$.

Задача 32

Доказать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 y}{x^2 + y^2} & , \text{ если } \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ \quad 0 & , \text{ если } \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

имеет частные производные в точке $O(0,0)$, но не дифференцируема в этой точке.

Решение

Вычислим сначала частные производные. При $y=0$ функция имеет вид $f(x,0)=x$, если $x\neq 0$ и $f(x,0)=0$, если $x=0$, то есть, объединяя два случая $f(x,0)=x$. Частная производная $\partial f/\partial x=1$ – для всех x (в том числе и $x=0$). Аналогично доказываем, что $\partial f/\partial y=0$.

Докажем, что функция не дифференцируема. Предположим противное (функция дифференцируема), тогда она может быть представлена в точке $O(0,0)$ в виде:

$$\Delta f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)}\Delta x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)}\Delta y+o(\Delta\rho).$$

Используя выражение для приращения функции в точке $O(0,0)$:

$$\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\frac{(\Delta x)^3+(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

и найденные значения частных производных, получим равенство:

$$\frac{(\Delta x)^3+(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\Delta x+o(\Delta\rho).$$

Перенесем Δx из правой части равенства налево, получим для бесконечно малой более высокого порядка чем первый представление:

$$o(\Delta\rho)=\frac{(\Delta x)^2\Delta y-\Delta x(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

Вводим полярные координаты: $\Delta x=\Delta\rho\cos\varphi$, $\Delta y=\Delta\rho\sin\varphi$, получаем, что

$$o(\Delta\rho)=\Delta\rho\cdot g(\varphi),$$

где $g(\varphi)$ не равно тождественно нулю, следовательно, $o(\Delta\rho)$ – бесконечно малая первого порядка. Получили противоречие, значит наше предположение о дифференцируемости функции не верно. Функция не является дифференцируемой в точке $O(0,0)$.

Задача 33

Доказать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,\ \text{если}\quad x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,\ \text{если}\quad x^2+y^2=0\end{cases}$$

имеет частные производные в окрестности точке $O(0,0)$, дифференцируема в самой точке $O(0,0)$, но частные производные в ней имеют разрыв.

Решение

Для точки $O(0,0)$ воспользуемся определением частной производной по x:

$$\Delta_x f = f(\Delta x, 0) - f(0,0) = (\Delta x)^2 \sin\frac{1}{|\Delta x|},$$

и

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x \sin\frac{1}{|\Delta x|} = 0.$$

Таким образом, $(\partial f/\partial x)_{(0,0)}$=0. Аналогично показываем, что и вторая частная производная $(\partial f/\partial y)_{(0,0)}$=0. Во всех остальных точках кроме $O(0,0)$ частные производные могут быть найдены с помощью обычных правил дифференцирования:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Если устремить в полученном выражении значения $(x,y)\to(0,0)$, получим, что первое слагаемое стремится к нулю, а предел второго не существует. Следовательно, частная производная – разрывна.

Покажем, что функция дифференцируема. Приращение функции равно:

$$\Delta f = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

Используем значения частных производных в точке $O(0,0)$, получаем очевидное равенство:

$$\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y + o(\Delta\rho).$$

Заметим, что левая часть равенства – бесконечно малая второго порядка по $\Delta\rho\to 0$. Следовательно, функция дифференцируема.

Приведенный пример показывает, что непрерывность частных производных является только достаточным, но не необходимым условием дифференцируемости функции в точке (что соответствует условию теоремы 2.3).

2.2 Касательная плоскость и ее нормаль

Геометрическую иллюстрацию понятия дифференцируемости функции поясняет (на примере функции двух переменных) следующая теорема.

Теорема 2.4 *Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в области D, тогда, если во внутренней точке $M_0(x_0, y_0)$ функция дифференцируема, то в этой точке существует касательная плоскость к поверхности, определяемой уравнением функции в пространстве E^3 и уравнение касательной плоскости имеет вид:*

$$u_{кас} = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0} (y - y_0).$$

Замечания

- Легко видеть, что в правой части равенства стоит дифференциал функции в точке M_0.

- Для функций большего числа переменных имеется аналогичная связь между дифференцируемостью и существованием касательной поверхности первого порядка (гиперплоскости) в точке.

- Вектор нормали к касательной плоскости, проведенный в точке касания называется *вектором нормали к поверхности* $u = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ (или просто *нормалью*) и имеет координаты:

$$\mathbf{N} = \pm \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0}; \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0}; -1 \right).$$

- Выбор знака у вектора нормали незамкнутой поверхности произволен. Для замкнутых поверхностей различают *внешнюю и внутреннюю* нормали.

Задача 34

Найти уравнение касательной плоскости к поверхности, а также отрезки, отсекаемые ею от осей координат, если уравнение поверхности имеет вид:

$$f(x, y) = 8xy^3 - x^4 y + \frac{4x^2}{x + 2y},$$

а касательная плоскость проведена в точке $A(2, 1)$.

Решение

Находим частные производные функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8y^3 - 4x^3 y + \frac{4x^2 + 16xy}{(x + 2y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 24xy^2 - x^4 - \frac{8x^2}{(x + 2y)^2}$$

и их значения в точке $A(2,1)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A = -5; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_A = 30.$$

Выписываем уравнение касательной плоскости, учитывая, что значение функции в точке A равно $f(A) = 4$:

$$u_{\text{кас}} = 4 - 5(x-2) + 30(y-1) = -5x + 30y - 16$$

или в другом (более удобном в данном случае) виде:

$$\frac{x}{(-16/5)} + \frac{y}{(8/15)} + \frac{u}{(-16)} = 1.$$

Длины отрезков, отсекаемых от осей координат OX, OY, OU равны соответственно $(-16/5); (8/15); (-16)$.

Задача 35

К поверхности сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

в точке, удовлетворяющей условиям $x_0, y_0, z_0 > 0$ проведена касательная плоскость, отсекающая от координатных плоскостей XOY, XOZ, YOZ треугольники $(x, y, z > 0)$. При каких значениях x_0, y_0, z_0 площади этих треугольников будут одинаковы.

Решение

Точка касания имеет координаты $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и принадлежит поверхности $(x_0)^2 + (y_0)^2 + (z_0)^2 = 1$, следовательно $z_0 = \sqrt{1 - (x_0)^2 - (y_0)^2}$. Так как рассматривается верхняя полусфера $(z > 0)$, то функция задана уравнением:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Находим уравнение касательной плоскости:

$$z_{\text{кас}} = z_0 - \frac{x_0}{z_0}(x - x_0) - \frac{y_0}{z_0}(y - y_0)$$

или

$$x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + z_0 \cdot z = 1.$$

Отрезки, отсекаемые от положительных направлений координатных осей OX, OY, OZ равны соответственно $1/x_0, 1/y_0, 1/z_0$. Площади треугольников одинаковы, если $x_0 = y_0 = z_0 = 1/\sqrt{3}$.

Задача 36

К поверхностям двух параболоидов:

$$u_1 = 4 - x^2 - y^2 \quad u_2 = x^2 + y^2$$

проведены нормали в общей точке $M(1,1)$. Найти угол между векторами нормали.

Решение

Находим частные производные и вектора нормали (в обоих случаях выбираем для определенности знак $+$):

$$\mathbf{N_1} = (-2,-2,-1); \quad \mathbf{N_2} = (2,2,-1).$$

Угол между векторами находим из скалярного произведения:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{N_1}\cdot\mathbf{N_2})}{|\mathbf{N_1}|\cdot|\mathbf{N_2}|} = -\,\frac{7}{9}.$$

2.3 Производная по направлению и градиент

Определение 34

Пусть в некоторой окрестности точки $A(a_1,\ldots,a_n)$ определена дифференцируемая функция $u = f(x_1,\ldots,x_n)$ и $\mathbf{s} = (\cos\alpha_1,\ldots,\cos\alpha_n)$ – вектор единичной длины. Выберем точку M таким образом, чтобы вектор AM был бы сонаправлен вектору $\mathbf{s}$. *Производной функции $u = f(M)$ по направлению* $\mathbf{s}$ в точке A называется предел:

$$\lim_{M\to A}\frac{f(M)-f(A)}{|AM|} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}\right)_A.$$

Так как функция $f(M)$ – дифференцируема, то приращение можно представить в виде

$$\Delta f \equiv f(M)-f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_A \Delta x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_A \Delta x_n + o(\rho),$$

где вектор $AM = (\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)$ параллелен и сонаправлен вектору $\mathbf{s}$. Следовательно, $AM = |AM|\cdot\mathbf{s}$ и $\Delta x_1 = |AM|\cos\alpha_1,\ldots,\Delta x_n = |AM|\cos\alpha_n$. Делим приращение функции на длину вектора $|AM| = \rho$ и устремляем ее к нулю, получаем:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}\right)_A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_A \cos\alpha_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_A \cos\alpha_n.$$

Формулу для производной по направлению удобно переписать в виде скалярного произведения вектора $\mathbf{s}$ и вектора

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

называемого *градиентом* функции. Используя вектор градиента перепишем формулу для производной по направлению:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}\right)_A = (\mathbf{s}\cdot \operatorname{grad} f)_A \,.$$

Скалярное произведение (при фиксированной длине векторов) принимает наибольшее значение если перемножаемые вектора сонаправлены, поэтому $(\partial f/\partial \mathbf{s})_A = \max$, если вектор $\mathbf{s} \uparrow\uparrow (\operatorname{grad} f)_A$. В этом смысле вектор градиента еще называют вектором наибольшего изменения функции, так как он показывает направление в котором функция изменяется быстрее всего.

Задача 37

Найти производную функции

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xz + 3x$$

в направлении $\mathbf{s} = (3/5; 0; 4/5)$ в точке $M(2,-1,0)$. Найти угол между градиентом функции в точке M и прямой, задаваемой уравнением

$$3x = 2y = -z.$$

Решение

Вычислим частные производные функции f в точке M :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M = (2x - 2z + 3)_M = 7;$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M = (2y)_M = -2;$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M = (-2x)_M = -4.$$

Производная по направлению, задаваемому вектором $\mathbf{s}$ равна скалярному произведению:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}\right)_M = 7\cdot\frac{3}{5} + 0 - 4\cdot\frac{4}{5} = 1.$$

Вектор градиента функции в точке M равен $\operatorname{grad} f(M) = (7,-2,-4)$, а прямая $3x = 2y = -z$ параллельна вектору $\mathbf{e} = (3,2,-1)$. Угол между векторами находим из скалярного произведения:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{e}\cdot \operatorname{grad} f)}{|e|\cdot|\operatorname{grad} f|} = \frac{21}{\sqrt{966}}.$$

2.4 Частные производные и дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала

Рассмотрим теперь вопросы дифференцирования сложной функции.

Теорема 2.5 *Пусть функция $f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в окрестности точки $A(a_1, \ldots, a_n)$ и ее переменные $x_1 = x_1(t_1, \ldots, t_p)$, ... , $x_n = x_n(t_1, \ldots, t_p)$ – зависят от других переменных $(t) = (t_1, \ldots, t_p)$. Пусть точка $(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ в пространстве переменных t_i соответствует точке A в пространстве x_i, то есть $x_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = a_1$, ... , $x_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = a_n$. Тогда, если функция $f(M)$ дифференцируема в точке A и функции $x_i(t)$ дифференцируемы в точке (α), то частные производные сложной функции $f(t_1, \ldots, t_p) = f\left(x_1(t_1, \ldots, t_p), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_p)\right)$ в точке (α) существуют и вычисляются по формуле:*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}\right)_{(\alpha)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_A \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_i}\right)_{(\alpha)} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_A \cdot \left(\frac{\partial x_n}{\partial t_i}\right)_{(\alpha)}.$$

Доказательство

При изменении значения только одной переменной t_i с α_i на $\alpha_i + \Delta t_i$ все переменные (x) в силу дифференцируемости функций $x(t)$ получат приращение

$$\Delta x_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_i}\right)_{(\alpha)} \Delta t_i + o(\Delta t_i)$$
$$\cdots$$
$$\Delta x_n = \left(\frac{\partial x_n}{\partial t_i}\right)_{(\alpha)} \Delta t_i + o(\Delta t_i)$$

и изменят свои значения с $a_1, \ldots, a_n$ на $a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n$. Приращение сложной функции в этом случае будет равно:

$$\Delta_{t_i} f = f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \ldots, a_n).$$

В силу дифференцируемости функции f оно может быть представлено следующим образом:

$$\Delta_{t_i} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_A \Delta x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_A \Delta x_n + o(\Delta\rho).$$

Подставляя вместо Δx_i полученные для них выражения, получим окончательно:

$$\Delta_{t_i} f = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_A \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_i}\right)_{(\alpha)} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_A \cdot \left(\frac{\partial x_n}{\partial t_i}\right)_{(\alpha)}\right) \Delta t_i + o(\Delta t_i).$$

Отношение $\Delta_{t_i} f / \Delta t_i$ будет стремится при $\Delta t_i \to 0$ к выражению в скобках, что и требовалось доказать.

Теорема 2.6 *При условиях предыдущей теоремы дифференциал сложной функции* $f(t_1,\dots,t_p) = f\left(x_1(t_1,\dots,t_p),\dots,x_n(t_1,\dots,t_p)\right)$ *в точке* (α) *существует и вычисляется по формуле:*

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_A dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_A dx_n,$$

где

$$dx_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right)_{(\alpha)} dt_1 + \dots + \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_p}\right)_{(\alpha)} dt_p$$
$$\dots$$
$$dx_n = \left(\frac{\partial x_n}{\partial t_1}\right)_{(\alpha)} dt_1 + \dots + \left(\frac{\partial x_n}{\partial t_p}\right)_{(\alpha)} dt_p$$

– дифференциалы зависимых переменных.

Доказательство

Во многом повторяет доказательство предыдущей теоремы. При изменении значения всех переменных t_i с α_i на $\alpha_i + \Delta t_i$ переменные (x) в силу дифференцируемости функций $x(t)$ получат приращение

$$\Delta x_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right)_{(\alpha)} \Delta t_1 + \dots + \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_p}\right)_{(\alpha)} \Delta t_p + o(\Delta t)$$
$$\dots$$
$$\Delta x_n = \left(\frac{\partial x_n}{\partial t_1}\right)_{(\alpha)} \Delta t_1 + \dots + \left(\frac{\partial x_n}{\partial t_p}\right)_{(\alpha)} \Delta t_p + o(\Delta t)$$

и изменят свои значения с $a_1,\dots,a_n$ на $a_1+\Delta x_1,\dots,a_n+\Delta x_n$. Далее, как в теореме 2.5. Доказательство завершено.

Замечания

- Свойство сохранения вида дифференциала функции для случая зависимых переменных (сложной функции) носит название *инвариантности формы первого дифференциала.*

- В частном случае функции двух переменных $u = f(x,y)$ если $y = y(x)$ дифференциал сложной функции имеет вид:

  $$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'(x)\right) dx,$$

  а отношение df/dx называется *полной производной* по переменной x функции $f(x, y(x))$ и, естественно, совпадает с обычной производной этой функции.

Задача 38

Найти дифференциал и частные производные функции

$$f(x, y, z) = 2xy + z^2$$

по переменным u, v, если $x = u + v$; $y = u - v$; $z = uv$.

Решение

Вычислим дифференциал функции $f(x, y, z)$:

$$df = 2ydx + 2xdy + 2zdz$$

и дифференциалы зависимых переменных:

$$dx = du + dv;\ dy = du - dv;\ dz = vdu + udv.$$

Подставляем последние в выражение для df и получаем:

$$df = 2(u - v)(du + dv) + 2(u + v)(du - dv) + 2uv(vdu + udv) =$$

$$= (4u + 2uv^2)du + (-4v + 2u^2v)dv.$$

Частные производные по u, v – это коэффициенты при соответствующих дифференциалах независимых переменных:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 4u + 2uv^2;\quad \frac{\partial f}{\partial v} = -4v + 2u^2v.$$

Тот же результат может, естественно, быть получен и другим способом. Подставим функции для зависимых переменных в $f(x, y, z)$:

$$f(u, v) = 2(u + v)(u - v) + (uv)^2 = 2u^2 - 2v^2 + u^2v^2.$$

Вычисляем частные производные и дифференциал для функции $f(u, v)$.

Задача 39

Найти производную $y'(x)$ неявной функции, заданной уравнением:

$$(x - y)\sin(xy) = 1.$$

Решение

Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y) = (x - y)\sin(xy)$. Исходное уравнение для неявной функции примет вид $f(x, y) = 1$. Продифференцируем равенство по переменной x, считая, что $y(x)$ – зависимая переменная (функция). Для вычисления производной левой части используем сформулированное выше правило:

$$\frac{df}{dx} = \sin(xy) + y(x - y)\cos(xy) + (-\sin(xy) + x(x - y)\cos(xy))\, y'(x).$$

Производная правой части (постоянной) равна нулю. Получаем:

$$\sin(xy) + y(x-y)\cos(xy) + (-\sin(xy) + x(x-y)\cos(xy))\, y'(x) = 0$$

или

$$y'(x) = \frac{\sin(xy) + y(x-y)\cos(xy)}{\sin(xy) - x(x-y)\cos(xy)}.$$

Задача 40

Найти производную u по переменной x и y, если $f(t)$ – дифференцируемая функция:

$$u = x^2 \cdot f\left(x - y^2\right).$$

если $f(t)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Решение

Вычисляем обе частные производные, учитывая, что $t = x - y^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot f\left(x - y^2\right) + x^2 f'(x - y^2) \cdot 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 f'(x - y^2) \cdot (-2y),$$

где $f'(t)$ – производная функции по аргументу t.

Задача 41

Найти частную производную по y функции

$$u = f(x - 2y, xy).$$

если $f(t_1, t_2)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Решение

Пусть $t_1 = x - 2y, t_2 = xy$, тогда $u = f(t_1, t_2)$ – функция двух переменных. Вычисляем производную по y, используя формулу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t_1} \cdot (-2) + \frac{\partial f}{\partial t_2} \cdot x.$$

Задача 42

Показать, что функция

$$u = f(x^2 + y^2)$$

удовлетворяет уравнению:

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

если $f(t)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Решение
Пусть $t = x^2+y^2$ – зависимая переменная. Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf^{'}(x^2+y^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yf^{'}(x^2+y^2).$$

Подставляем их в уравнение и получаем тождество.

Задача 43
Составить уравнение с частными производными для функции

$$u = x - f(xy),$$

если $f(t)$ – произвольная дифференцируемая функция.
Решение
Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - yf^{'}(xy),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xf^{'}(xy).$$

Чтобы исключить неизвестную функцию $f(t)$ домножим первое равенство на x, а второе на $(-y)$ и сложим, получим уравнение:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x.$$

Заметим, что, если рассмотреть обратную задачу, то полученное уравнение с частными производными будет иметь решение в виде $u = x - f(xy)$, где $f(t)$ – произвольная дифференцируемая функция.

2.5 Частные производные и дифференциалы высших порядков. Оператор Лапласа

Определение 35
Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет в окрестности точки A частную производную $\partial u/\partial x_i$ (она называется *частной производной первого порядка*), тогда если функция $\partial u/\partial x_i = f_1(x_1, \ldots, x_n)$ имеет в окрестности точки A частную производную по переменной x_j, то эта производная для исходной функции $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *частной производной второго порядка* и обозначается одним из следующих символов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = u_{x_i x_j}(x_1, \ldots, x_n) = f_{x_i x_j}(x_1, \ldots, x_n).$$

Отметим, что в первых двух обозначениях последовательность переменных по которым ведется дифференцирование нумеруется справа налево (сначала правая переменная x_i, потом следующая – x_j), а во вторых двух – наоборот. Для случая $i \neq j$ производная называется *смешанной частной производной*. Если $i = j$, то производная обозначается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = u_{x_i^2}(x_1, \dots, x_n) = f_{x_i^2}(x_1, \dots, x_n).$$

Частные производные третьего порядка определяются как производные от частных производных второго порядка, и т.д. В общем случае *частная производная n-го порядка* определяется формулой:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right).$$

Если не все переменные по которым ведется дифференцирование совпадают, то производная также называется смешанной.

В общем случае смешанная производная зависит от порядка дифференцирования то есть для произвольной функции $\partial^2 u / \partial x_j \partial x_i \neq \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$, однако неравенство этих производных – довольно исключительный случай. Условие независимости результата от порядка дифференцирования регулируется следующей теоремой, приводимой без доказательства.

Теорема 2.7 *Если все смешанные частные производные n-го порядка существуют в некоторой окрестности точки A и непрерывны в самой точке A, то они не зависят в этой точке от порядка дифференцирования.*

Сформулируем теорему непосредственно для функции двух переменных.

Теорема 2.8 *Если в окрестности точки $A(x_0, y_0)$ функция $u = f(x, y)$ имеет первые частные производные и смешанные вторые частные производные $f_{xy}(x, y)$ и $f_{yx}(x, y)$ и они непрерывны в точке A, то они равны в этой точке друг другу:*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Доказательство

Рассмотрим приращение переменных $\Delta x, \Delta y$ такие малые, что точка $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ принадлежит окрестности, в которой определены по условию теоремы частные производные. Рассмотрим следующую комбинацию значений функции:

$$W = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0).$$

Сгруппируем слагаемые попарно и введем вспомогательную функцию:

$$W = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] =$$

$$= \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0).$$

Здесь $\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$ – непрерывная и дифференцируемая функция. Применим дважды теорему Лагранжа:

$$W = \varphi_x(\xi_1)\Delta x = (f_x(\xi_1, y_0 + \Delta y) - f_x(\xi_1, y_0))\,\Delta x = f_{xy}(\xi_1, \eta_1)\Delta x \Delta y,$$

где ξ_1 лежит между x_0 и $x_0 + \Delta x$, а η_1 – между y_0 и $y_0 + \Delta y$.

Поменяем средние слагаемые местами, сгруппируем их попарно и введем другую вспомогательную функцию:

$$W = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y))] - [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] =$$

$$= \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0).$$

Здесь $\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$. Применим опять теорему Лагранжа:

$$W = \psi_y(\eta_2)\Delta y = [f_y(x_0 + \Delta x, \eta_2) - f_y(x_0, \eta_2)]\,\Delta y = f_{yx}(\xi_2, \eta_2)\Delta x \Delta y,$$

где ξ_2, η_2 лежат в тех же пределах, что и ξ_1, η_1.

Получили равенство:

$$f_{xy}(\xi_1, \eta_1) = f_{yx}(\xi_2, \eta_2),$$

которое в пределе $\Delta x, \Delta y \to 0$ переходит в равенство для смешанных производных в точке (x_0, y_0). Теорема доказана.

Определение 36

Функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется дифференцируемой n раз в точке A, если все ее частные производные $(n-1)$-го порядка дифференцируемы как функции нескольких переменных в этой точке.

Справедлива также и вторая теорема для равенства смешанных производных, приводимая без доказательства.

Теорема 2.9 *Если в окрестности точки $A(x_0, y_0)$ определена функция $u = f(x, y)$ и она дважды дифференцируема в самой точке A, то смешанные производные в этой точке равны.*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Определение 37

Пусть $u = f(x, y)$ определена и дифференцируема в окрестности точки $A(x_0, y_0)$ и дважды дифференцируема в самой точке A, тогда первый дифференциал определяется как

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

и зависит от переменных x, y и dx, dy. При этом функции $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ являются дифференцируемыми в точке A. *Второй дифференциал в точке* A определяется как дифференциал от первого дифференциала $d^2 f = d(df)$ при двух дополнительных условиях:

- Первый дифференциал рассматривается только как функция x, y, а переменные dx, dy считаются неизменными.

- При нахождении дифференциалов от функций $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ приращения переменных берутся равными приращениям переменных в первом дифференциале, то есть dx, dy.

На основании чего получается выражение:

$$d^2 f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Для более компактной записи формулы введем следующие понятия: символ $\partial/\partial x$ назовем *оператором частной производной по* x, а $\partial/\partial y$ – по y. Для получения осмысленного выражения необходимо, чтобы оператор действовал на функцию $f(x, y)$, при этом получается соответствующая частная производная:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Степень оператора определим как кратное действие оператора:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

и т.д.

Символ $d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$ назовем *оператором дифференциала*. Степень этого оператора определим как степень двучлена:

$$d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n.$$

В частности, для $n = 2$ имеем:

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2.$$

Действие оператора d^2 на функцию $f(x, y)$ дает второй дифференциал этой функции.

Определение 38

Дифференциал n-го порядка для функции $f(x, y)$ с независимыми переменными x, y определяется по индукции как дифференциал от $d^{n-1}f$, то есть $d^n f = d(d^{n-1}f)$ и выражается в виде:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x, y).$$

В случае большего числа независимых переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ имеет место аналогичная формула:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^n f.$$

Если переменные x, y не являются независимыми, а функционально зависят от переменных $(t_1, \ldots, t_p)$, то, например, дифференциал второго порядка как дифференциал сложной функции имеет вид:

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f + \left(\frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y\right), \tag{2.2}$$

где dx, dy, d^2x, d^2y – дифференциалы первого и второго порядка соответствующих функций. Таким образом, вид второго дифференциала сложной функции иной, чем вид второго дифференциала функции с независимыми переменными. Это свойство называется *неинвариантностью формы второго дифференциала* и сохраняется для всех высших дифференциалов.

Определение 39

Пусть $f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ – дважды дифференцируемая в окрестности точки $A(a_1, \ldots, a_n)$ функция. Говорят, что эта функция *гармоническая*, в окрестности точки A, если она удовлетворяет в ней *уравнению Лапласа:*

$$\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

Формально записанная величина

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

называется *оператором Лапласа* и имеет смысл только, если действует на некоторую функцию. Не путать с приращением функции, обозначаемым тождественным образом !!!

Задача 44

Вычислить вторые производные функции

$$f(x,y) = 2xy + y^x$$

и проверить равенство смешанных производных.

Решение

Вычисляем частные производные:

$$\begin{array}{ll} f_x(x,y) = 2y + y^x \ln y; & f_y(x,y) = 2x + xy^{x-1}; \\ f_{xx}(x,y) = y^x \ln^2 y; & f_{xy}(x,y) = 2 + xy^{x-1}\ln y + y^{x-1}; \\ f_{yx}(x,y) = 2 + y^{x-1} + xy^{x-1}\ln y; & f_{yy}(x,y) = x(x-1)y^{x-2}. \end{array}$$

Так как функция $f(x,y)$ относится к разряду элементарных функций, то ее частные производные – элементарные функции и непрерывны в любой точке, принадлежащей их области определения. В соответствии с теоремами, смешанные производные равны $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$.

Задача 45

Вычислить смешанные производные функции

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{если} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{если} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

в точке $O(0,0)$.

Решение

Для точек $(x,y) \neq (0,0)$ вычисляем первую частную производную по x:

$$f_x(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}.$$

Так как $f(x,0) = 0$, то значение $f_x(0,0) = 0$. Функция $f_x(0,y) = -y$ для всех y (даже для $y = 0$). Вычисляем смешанную производную $f_{xy}(0,0)$, для чего продифференцируем по $y : f_x(0,y) = -y$, получаем $f_{xy}(0,0) = -1$.

Для точек $(x,y) \neq (0,0)$ вычисляем первую частную производную по y:

$$f_y(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Так как $f(0,y) = 0$, то значение $f_y(0,0) = 0$. Функция $f_y(x,0) = x$ для всех x (даже для $x = 0$). Вычисляем смешанную производную $f_{yx}(0,0)$, для чего продифференцируем по x : $f_y(x,0) = x$, получаем $f_{yx}(0,0) = 1$. Получили, что $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. Это связано с тем, что смешанные производные не являются непрерывными в точке $O(0,0)$.

Задача 46

Вычислить производную $f_{x^n y}(x,y)$ функции

$$f(x,y) = x\left(1 - e^{x/y}\right)$$

в точке $A(0,1)$.

Решение

Функция относится к элементарным и, следовательно, смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования. Вычислим сначала производную по y:

$$f_y(x,y) = -x \cdot e^{x/y}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x^2}{y^2} \cdot e^{x/y}.$$

Затем, используя формулу Лейбница, вычислим n производных по x :

$$f_{x^n y}(x,y) = \frac{1}{y^2}\left(x^2 e^{x/y}\right)_{x^n} = \frac{1}{y^2}\left(x^2 e^{x/y} \cdot \frac{1}{y^n} + 2nxe^{x/y} \cdot \frac{1}{y^{n-1}} + \right.$$

$$\left. + n(n-1)e^{x/y} \cdot \frac{1}{y^{n-2}}\right) = \frac{1}{y^{n+2}} \cdot e^{x/y}\left(x^2 + 2nxy + n(n-1)y^2\right).$$

Значение производной в точке A равно $f_{x^n y}(0,1) = n(n-1)$.

Задача 47

Найти дифференциал $d^2 f$ функции

$$f(x,y) = x^y$$

в точке $A(1,0)$.

Решение

Вычисляем первые частные производные:

$$f_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}; \quad f_y(x,y) = x^y \cdot \ln x$$

и вторые частные производные:

$$\begin{aligned}
&f_{xx}(x,y) = y(y-1) \cdot x^{y-2};\\
&f_{xy}(x,y) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x;\\
&f_{yy}(x,y) = x^y \cdot (\ln x)^2.
\end{aligned}$$

Подставляем значения $x = 1, y = 0$, получаем $f_{xx}(1,0) = 0$, $f_{xy}(1,0) = 1$, $f_{yy}(1,0) = 0$. Второй дифференциал в точке A равен $\left(d^2 f\right)_A = 2dxdy$.

Задача 48

Найти второй дифференциал функции

$$u = f(x+y, x-y),$$

где $f(t_1, t_2)$ – дважды дифференцируемая функция.

Решение

Пусть $t_1 = x+y, t_2 = x-y$ функции независимых переменных x, y. Так как $d^2 t_{1,2} = 0$, то для вычисления второго дифференциала можно использовать общую формулу для независимых аргументов (второе слагаемое в формуле 2.2 равно нулю). Вычисляем частные производные:

$$u_x = f_1 + f_2; \quad u_y = f_1 - f_2$$

и

$$u_{xx} = f_{11} + 2f_{12} + f_{22}; \quad u_{xy} = f_{11} - f_{22}; \quad u_{yy} = f_{11} - 2f_{12} + f_{22},$$

где для краткости использовались обозначения $f_{12} = f_{t_1 t_2}(x+y, x-y)$ и т.д. Дифференциал функции имеет инвариантный вид:

$$d^2u = (f_{11} + 2f_{12} + f_{22})\,(dx)^2 + 2\,(f_{11} - f_{22})\,dxdy + (f_{11} - 2f_{12} + f_{22})\,(dy)^2 =$$
$$= f_{11} \cdot (dx+dy)^2 + 2f_{12} \cdot (dx+dy)(dx-dy) + f_{22} \cdot (dx-dy)^2 =$$
$$= f_{11} \cdot (dt_1)^2 + 2f_{12} \cdot dt_1 dt_2 + f_{22} \cdot (dt_2)^2.$$

Задача 49

Доказать, что функция

$$u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

является гармонической для $(x, y) \neq (0, 0)$.

Решение

Нужно доказать, что эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Вычисляем частные производные первого:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

и второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Подставляем их в уравнение и получаем тождество:

$$\frac{4}{x^2+y^2} - \frac{4\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \equiv 0.$$

2.6 Формула Тейлора и формула Лагранжа для функции нескольких переменных

Теорема 2.10 *Если в окрестности точки* $A(a_1, \ldots, a_n)$ *определена и дифференцируема* $(N+1)$ *раз функция* $u = f(x_1, \ldots, x_n)$, *то для любой точки* $M(x_1, \ldots, x_n)$ *из этой окрестности, такой, что* $\Delta x_1 = x_1 - a_1, \ldots, \Delta x_n = x_n - a_n$ *справедливо представление функции в виде суммы:*

$$f(M) = f(A) + \frac{(df)_A}{1!} + \frac{\left(d^2 f\right)_A}{2!} + \cdots + \frac{\left(d^N f\right)_A}{N!} + \frac{\left(d^{N+1} f\right)_{M_1}}{(N+1)!},$$

где точка M_1 *лежит на отрезке* $[MA]$, *а дифференциалы* $d^k f$ *вычисляются по формулам приведенным выше. Дифференциалы независимых переменных равны приращениям аргументов* $dx_1 = \Delta x_1, \ldots, dx_n = \Delta x_n$.

Последнее слагаемое в формуле Тейлора:

$$R_{N+1} = \frac{\left(d^{N+1} f\right)_{M_1}}{(N+1)!}$$

называется остаточным членом формулы Тейлора и имеет $(N+1)$ порядок малости по переменной $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}$. Следовательно, остаточный член может быть записан в другом виде $R_{N+1} = o(\Delta\rho^N)$, называемом *остаточный член в форме Пеано.*

При $N = 0$ из формулы Тейлора получается *формула Лагранжа:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{M_1} \Delta x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{M_1} \Delta x_n.$$

Задача 50

Разложить функцию в ряд Тейлора до второго порядка включительно:

$$f(x, y) = e^{x/y}$$

в окрестности точки $A(0, 1)$.

Решение

Вычисляем частные производные первого

$$f_x = \frac{1}{y} \cdot e^{x/y}; \quad f_y = -\frac{x}{y^2} \cdot e^{x/y}$$

и второго порядков:

$$f_{xx} = \frac{1}{y^2} \cdot e^{x/y}; \quad f_{xy} = -\frac{x+y}{y^3} \cdot e^{x/y} \quad f_{yy} = \frac{x^2 + 2xy}{y^4} \cdot e^{x/y},$$

а также их значения в точке $A(0,1)$:

$$f_x(A)=1;\ f_y(A)=0;\ f_{xx}(A)=1;\ f_{xy}(A)=-1;\ f_{yy}(A)=0.$$

Учитывая значение функции $f(A)=1$ и равенство дифференциалов и приращений аргументов $dx=x-0; dy=y-1$, выписываем разложение:

$$f(x,y)=f(A)+(df)_A+\frac{(d^2f)_A}{2!}+\Delta R_3=$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}-x(y-1)+\Delta R_3=1+2x+\frac{x^2}{2}-xy+\Delta R_3,$$

где $\Delta R_3 = o\left(x^2+(y-1)^2\right)$ – остаточный член в форме Пеано (порядок малости больше второго).

Ранее было введено понятие равномерной непрерывности и сформулирована теорема Кантора о связи непрерывности и равномерной непрерывности функции на замкнутом ограниченном множестве. Приведем также еще одну теорему о равномерной непрерывности (достаточное условие) дифференцируемой функции на множестве точек вообще говоря не ограниченном. Данная теорема помещена в этот раздел, так как в доказательстве ее используется формула Лагранжа.

Теорема 2.11 *(Достаточное условие равномерной непрерывности)* *Пусть функция $f(M)=f(x_1,\dots,x_n)$ определена и дифференцируема в выпуклой области D и все ее первые частные производные $\partial f/\partial x_i$ ограничены в этой области, тогда функция равномерно непрерывна в этой области.*

Доказательство

Пусть частные производные $|\partial f/\partial x_1|\leqslant C$, ... , $|\partial f/\partial x_n|\leqslant C$ в области D ограничены числом C. Возьмем $M_1(x_1,\dots,x_n)\in D$ и $M_2(y_1,\dots,y_n)\in D$ две произвольные точки области, удовлетворяющие условию близости $\rho\left(M_1,M_2\right)<\delta$. Из этого условия следует, что $|x_1-y_1|<\delta$, ... ,$|x_n-y_n|<\delta$. Так как область выпуклая, то отрезок $[M_1,M_2]$ целиком лежит в области D и в силу дифференцируемости функции может быть применена формула Лагранжа, то есть существует такая точка $A\in[M_1,M_2]$, что:

$$f(M_1)-f(M_2)=f_{x_1}(A)(x_1-y_1)+\dots+f_{x_n}(A)(x_n-y_n).$$

Тогда

$$|f(M_1)-f(M_2)|\leqslant|f_{x_1}(A)|\cdot|x_1-y_1|+\dots+|f_{x_n}(A)|\cdot|x_n-y_n|<nC\cdot\delta=\varepsilon,$$

для $\delta=\varepsilon/(nC)$. Таким образом, функция равномерно непрерывна и теорема доказана.

Задача 51

Является ли функция:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & , \text{ если } \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , \text{ если } \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

равномерно непрерывной на множестве R^2.

Решение

Частные производные функции $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 1$ и при $x^2+y^2 \neq 0$:

$$f_x(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2};$$

$$f_y(x,y) = \frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

ограничены на всей плоскости. Это легко показать, если перейти к полярным координатам. Для $f_x(x,y)$, например, получим:

$$|f_x| = |\cos^4\varphi + 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 2\cos\varphi\sin^3\varphi| \leqslant 6.$$

Функция определена и непрерывна на всей плоскости, однако не дифференцируема в точке $O(0,0)$ (см. задачу 32). Поэтому, функция равномерно непрерывна на всей плоскости, кроме точки O. Если точка O не лежит на отрезке $[M_1, M_2]$, то на оценку разности $|f(M_1) - f(M_2)|$ не влияет факт отсутствия дифференцируемости в точке O, если же, $O \in [M_1, M_2]$, то выберем точку $M_3 \notin [M_1, M_2]$:

$$|f(M_1) - f(M_2)| = |(f(M_1) - f(M_3)) - (f(M_2) - f(M_3))| \leqslant$$

$$\leqslant |f(M_1) - f(M_3)| + |f(M_2) - f(M_3)| < 2\varepsilon$$

при $\rho(M_1, M_2); \rho(M_1, M_3); \rho(M_3, M_2) < \delta$. Таким образом, функция равномерно непрерывна на всей плоскости.