Глава 13

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Преобразование Лапласа

1. Определение и свойства преобразования Лапласа. *Преобразованием Лапласа* функции $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (которая, вообще говоря, может принимать и комплексные значения), называется функция $F(p)$ комплексной переменной p, определяемая следующим равенством:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt. \tag{1}$$

Оригиналом называется всякая функция $f(t)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$, причем принимается, что $f(0) = f(+0)$;

2) существуют такие постоянные σ и M, что

$$|f(t)| < Me^{\sigma t} \quad \text{при} \quad t > 0 \tag{2}$$

(величина $\sigma_0 = \inf \sigma$ называется *показателем роста* функции $f(t)$);

3) на любом конечном отрезке $[0, T]$ функция $f(t)$ может иметь лишь конечное число точек разрыва, причем только 1-го рода.

Если $f(t)$ — оригинал, то стоящий в правой части равенства (1) интеграл Лапласа сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma > \sigma_0$. При этом функция $F(p)$ является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ и называется *изображением* функции $f(t)$.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ символически записывается в виде $F(p) \risingdotseq f(t)$.

Пример 1. Найти показатель роста многочлена $f(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$.

◀ Заметим, что для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0}{e^{\sigma t}} = 0.$$

Значит, для любого $\sigma > 0$ существует такое число $M = M(\sigma)$, что выполняется неравенство:

$$|a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0| < M(\sigma)\, e^{\sigma t}, \quad t > 0.$$

Следовательно, $\sigma_0 = \inf\limits_{\sigma > 0} \sigma = 0$.

Заметим, что при $\sigma = \sigma_0 = 0$ неравенство (2) не выполняется. ▶

Пример 2. Найти изображение *функции Хевисайда*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

◀ Так как функция Хевисайда является оригиналом с показателем роста $\sigma_0 = 0$, то

$$\eta(t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

при $\operatorname{Re} p > 0$. ▶

Всюду в дальнейшем под заданной с помощью формулы функцией $f(t)$ будем понимать произведение этой функции на функцию Хевисайда $\eta(t)$, т. е. считать $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Проверить, являются ли следующие функции оригиналами, и найти их показатели роста.

13.1. $f(t) = e^{3t+2}$. **13.2.** $f(t) = e^{t^2}$.

13.3. $f(t) = e^{-t}$. **13.4.** $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1/\sqrt{t}, & t > 1. \end{cases}$

13.5. $f(t) = \ln(t+1)$. **13.6.** $f(t) = t^3$.

13.7. $f(t) = t \sin\frac{1}{t}$. **13.8.** $f(t) = e^{1/t}$.

Используя формулу (1), найти изображения для следующих оригиналов:

13.9. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 2, \\ -1, & 2 \leqslant t < 3, \\ 0, & 3 \leqslant t. \end{cases}$

13.10. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t < 2, \\ \frac{1}{2}(4-t), & 2 \leqslant t < 4, \\ 0, & 4 \leqslant t. \end{cases}$

13.11. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t < \tau, \\ 1, & \tau \leqslant t. \end{cases}$

13.12. $f(t) = \begin{cases} t(2-t), & 0 \leqslant t < 2, \\ 0, & 2 \leqslant t. \end{cases}$

13.13. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t < 1, \\ 1, & 1 \leqslant t < 2, \\ 3-t, & 2 \leqslant t < 3, \\ 0, & 3 \leqslant t. \end{cases}$

13.14. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}(\pi - t), & \frac{\pi}{2} \leqslant t < \frac{3\pi}{2}, \\ \sin t, & \frac{3\pi}{2} \leqslant t < 2\pi, \\ 0, & 2\pi \leqslant t. \end{cases}$

Свойства преобразования Лапласа:

1. Свойство линейности. Для любых постоянных C_k, $k=1, 2, \ldots, n$,

$$\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t) \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p), \quad \mathrm{Re}\, p > \max\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}.$$

2. Теорема подобия. Для любой постоянной $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \fallingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \mathrm{Re}\, p > \alpha\sigma_0.$$

3. Теорема смещения. Умножению оригинала на $e^{\alpha t}$, $\alpha \in R$, соответствует смещение аргумента изображения на α, т. е.

$$e^{\alpha t} f(t) \fallingdotseq F(p-\alpha), \quad \mathrm{Re}\,(p-\alpha) > \sigma_0.$$

4. Теорема запаздывания. Запаздыванию оригинала на τ соответствует умножение изображения на $e^{-p\tau}$, т. е.

$$\eta(t-\tau) f(t-\tau) \fallingdotseq e^{-p\tau} F(p), \quad \mathrm{Re}\, p > \sigma_0.$$

5. Дифференцирование оригинала. Если $f(t)$ и ее производные $f^{(k)}(t)$, $k=1, 2, \ldots$, являются оригиналами, то для любого $k=1, 2, \ldots, n$

$$f^{(k)}(t) \fallingdotseq p^k F(p) - (p^{k-1} f(0) + p^{k-2} f'(0) + \ldots + f^{(k-1)}(0)).$$

В частности,

$$f'(t) \fallingdotseq pF(p) - f(0), \quad \mathrm{Re}\, p > \sigma_0.$$

6. Интегрирование оригинала:

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \fallingdotseq \frac{F(p)}{p}, \quad \mathrm{Re}\, p > \sigma_0.$$

7. Дифференцирование изображения. Умножению оригинала на множитель t соответствует умножение изображения на -1 и дифференцирование его по аргументу p:

$$t^n f(t) \fallingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p), \quad n=1, 2, \ldots$$

8. Интегрирование изображения. Если $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом, то

$$\frac{1}{t} f(t) \fallingdotseq \int_p^{\infty} F(q)\, dq.$$

9. Дифференцирование и интегрирование по параметру. Если $f(t, \alpha) \fallingdotseq F(p, \alpha)$ и функции $\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}$ и $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha)\, d\alpha$, рассматриваемые как функции переменной t, являются оригиналами, то

$$\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} \fallingdotseq \frac{\partial F(p, \alpha)}{\partial \alpha} \quad \text{и} \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha)\, d\alpha \fallingdotseq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(p, \alpha)\, d\alpha.$$

10. Теорема Бореля об изображении свертки. Свертке оригиналов

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau$$

соответствует произведение изображений, т. е.

$$f_1 * f_2 \fallingdotseq F_1(p) F_2(p).$$

11. Интеграл Дюамеля. Если $f(t) \fallingdotseq F(p)$ и $g(t) \fallingdotseq G(p)$, то

$$pF(p) G(p) \fallingdotseq f(0) g(t) + (f' * g)(t) = g(0) f(t) + (g' * f)(t).$$

Зная изображение функции Хевисайда $\eta(t) \fallingdotseq \frac{1}{p}$ (см. пример 2), можно с помощью перечисленных выше свойств 1—11 построить таблицу изображений основных функций.

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	6	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
2	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	7	$\mathrm{ch}\, \beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	8	$\mathrm{sh}\, \beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$
4	$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$	9	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
5	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	10	$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$

С помощью свойств преобразования Лапласа и таблицы основных изображений можно найти изображения большинства функций, встречающихся на практике.

Пример 3. Найти изображение функции $\sin^3 t$.

◀ Имеем по формуле Эйлера

$$\sin^3 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{3(e^{it} - e^{-it})}{2i} - \frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i}\right) = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t.$$

Используя свойство линейности и формулу 6 таблицы, находим:

$$\sin^3 t \fallingdotseq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{p^2+9} = \frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}. ▶$$

Пример 4. Найти изображение функции $t^2 \cos 2t$.

◀ Используя формулу Эйлера и формулу 4 таблицы изображений, получаем:

$$t^2\cos 2t = \frac{1}{2}t^2\left(e^{2it}+e^{-2it}\right) \risingdotseq \frac{1}{(p-2i)^3}+\frac{1}{(p+2i)^3}=2\,\frac{p^3-12p}{(p^2+4)^3}.$$

Заметим, что изображение указанной функции можно было бы получить и другим способом, а именно, дважды дифференцируя изображение для $\cos 2t$. ▶

Пример 5. Найти изображение функции $\operatorname{Si} t=\int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$ (эту функцию называют *интегральным синусом*).

◀ Используя теорему интегрирования изображения, находим

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{\infty}\frac{dq}{q^2+1}=\operatorname{arctg} q\,\Big|_p^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p.$$

Отсюда по теореме интегрирования оригинала получаем

$$\operatorname{Si} t=\int\limits_0^t\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p\right). ▶$$

Пример 6. Найти изображение функции $\int\limits_0^t \cos(t-\tau)\,e^{-2\tau}\,d\tau$.

◀ Используя теорему Бореля об изображении свертки, получаем

$$\int\limits_0^t \cos(t-\tau)\,e^{-2\tau}\,d\tau=\cos t * e^{-2t} \risingdotseq \frac{p}{(p^2+1)(p+2)}. ▶$$

Пример 7. Найти изображение оригинала $f(t)$, если

$$f(t)=\begin{cases}\sin t & \text{при } 0\leqslant t<\pi,\\ 0 & \text{при } t\geqslant\pi.\end{cases}$$

◀ Используя функцию Хевисайда и учитывая, что $\eta(t-\pi)=1$ при $t\geqslant\pi$, функцию $f(t)$ запишем в виде

$$f(t)=\sin t+\eta(t-\pi)\sin(t-\pi).$$

Пользуясь формулой 6 таблицы и теоремой запаздывания, получаем

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{e^{-\pi p}}{p^2+1}=\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}. ▶$$

13.15*. Доказать следующие теоремы о связи «начальных» и «конечных» значений оригинала и изображения. Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, то

а) $f(0)=\lim\limits_{p\to\infty} pF(p)$

и (если существует конечный $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=f(+\infty)$)

б) $f(+\infty)=\lim\limits_{p\to 0} pF(p)$.

13.16. Доказать следующие соотношения[1]):

а) $\frac{t^n}{n!}\cos\beta t \risingdotseq \frac{\widetilde{\operatorname{Re}}\left((p+\beta i)^{n+1}\right)}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$;

б) $\frac{t^n}{n!}\sin\beta t \risingdotseq \frac{\widetilde{\operatorname{Im}}\left((p+\beta i)^{n+1}\right)}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$.

Найти изображения заданных функций:

13.17. $\frac{1}{2}t^2+1$.

13.18. $t^2-\frac{1}{2}e^t$.

13.19. $e^{-t}+3e^{-2t}+t^2$.

13.20. $2\sin t-\cos\frac{t}{2}$.

13.21. $\cos^2 t$.

13.22. $\sin^2(t-a)$.

13.23. $\operatorname{sh}^3 t$.

13.24. $\operatorname{ch} t\sin t$.

13.25. $\operatorname{sh} 3t\cos 2t$.

13.26. $t\operatorname{ch} 2t$.

13.27. $\sin t-t\cos t$.

13.28. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t\sin t+\operatorname{sh} t\cos t)$.

13.29. t^2e^{-t}.

13.30. t^3e^{2t}.

13.31. $e^{2t}\cos t$.

13.32. $e^{-t}\sin^2 t$.

13.33. $t^2\operatorname{ch} 2t$.

13.34. $te^{-t}\sin t$.

13.35. $te^{-t}\operatorname{sh} t$.

13.36*. $\int\limits_0^t e^{-\frac{t-\tau}{2}}\,\tau\,d\tau$.

13.37. $\int\limits_0^t (t-\tau)^2\cos 2\tau\,d\tau$.

13.38. $\int\limits_0^t \tau e^{t-\tau}\sin(t-\tau)\,d\tau$.

13.39*. $\int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch}\tau-1}{\tau}\,d\tau$.

13.40. $\int\limits_0^t \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau$.

13.41. $\int\limits_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}\,d\tau$.

13.42*. $\int\limits_0^t \frac{\cos\beta\tau-\cos\alpha\tau}{\tau}\,d\tau$.

13.43. $\int\limits_0^t \frac{e^{\beta\tau}-e^{\alpha\tau}}{\tau}\,d\tau$.

Найти изображения дифференциальных выражений при заданных начальных условиях.

13.44. $x^{\mathrm{IV}}(t)+4x'''(t)+2x''(t)-3x'(t)-5$; $x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$.

---

[1]) Здесь обозначения $\widetilde{\operatorname{Re}}$ и $\widetilde{\operatorname{Im}}$ подчеркивают тот факт, что действительная и мнимая части соответствующего комплексного многочлена берутся условно, т. е. p считается вещественным числом.

13.45. $x'''(t)+6x''(t)+x'(t)-2x(t)$; $x(0)=x'(0)=0$, $x''(0)=1$.

13.46. $x''(t)+5x'(t)-7x(t)+2$; $x(0)=\alpha$, $x'(0)=0$.

Используя теорему запаздывания, найти изображения следующих функций:

13.47. $\eta(t-1)e^{t-1}$. **13.48.** $\eta(t-2)\sin^2((t-2)/2)$.

13.49*. $\eta(t-1)te^t$. **13.50*.** $\eta\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\sin t$.

13.51. $f(t)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leqslant t<\tau,\\ 0 & \text{при } t\geqslant\tau\end{cases}$

(единичный импульс, действующий в течение промежутка времени от $t=0$ до $t=\tau$).

13.52. $f(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<T,\\ 1 & \text{при } T\leqslant t<T+\tau,\\ 0 & \text{при } t\geqslant T+\tau\end{cases}$

(запаздывающий единичный импульс).

13.53. $f(t)=\begin{cases}\frac{h}{\tau}t & \text{при } 0\leqslant t<\tau,\\ h & \text{при } \tau\leqslant t<2\tau,\\ -\frac{h}{\tau}(t-3\tau) & \text{при } 2\tau\leqslant t<3\tau,\\ 0 & \text{при } t\geqslant 3\tau.\end{cases}$

13.54. $f(t)=\begin{cases}\sin t & \text{при } 0\leqslant t<\pi/2,\\ -\cos t & \text{при } \pi/2\leqslant t<\pi,\\ 0 & \text{при } t\geqslant\pi.\end{cases}$

13.55. $f(t)=\begin{cases}h & \text{при } 0\leqslant t<1,\\ he^{-(t-1)} & \text{при } t\geqslant 1.\end{cases}$

13.56. $f(t)=\begin{cases}\sin t & \text{при } 0\leqslant t<\pi,\\ \operatorname{sh}(t-\pi) & \text{при } t\geqslant\pi.\end{cases}$

13.57.** Доказать, что если $f(t)$ — периодическая функция с периодом l, то

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pl}}\int_0^l e^{-pt}f(t)\,dt.$$

Используя результат задачи 13.57, найти изображения периодических функций (аналитические формулы определяют заданные функции на периоде $[0, l]$):

13.58. $f(t)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leqslant t<\tau,\\ 0 & \text{при } \tau\leqslant t<T;\end{cases}$ $l=T$

(периодическая последовательность единичных импульсов).

13.59. $f(t)=\sin\beta t$ при $0<t<\pi/\beta$; $l=\pi/\beta$ (т. е. $f(t)=|\sin\beta t|$).

13.60. $f(t)=\begin{cases}\sin t & \text{при } 0\leqslant t<\pi,\\ 0 & \text{при } \pi\leqslant t<T;\end{cases}$ $l=T$.

13.61. $f(t)=\begin{cases}h & \text{при } 0\leqslant t<c,\\ -h & \text{при } c\leqslant t<2c;\end{cases}$ $l=2c$.

13.62. $f(t)=\frac{h}{c}t$ при $0\leqslant t<c$; $l=c$.

13.63. $f(t)=\begin{cases}\frac{h}{c}t & \text{при } 0\leqslant t<c,\\ -\frac{h}{c}t & \text{при } c\leqslant t<2c;\end{cases}$ $l=2c$.

13.64. $f(t)=\cos\beta t$ при $0\leqslant t<\frac{\pi}{2\beta}$, $l=\frac{\pi}{2\beta}$.

13.65. $f(t)=|\sin t|$, $l=2\pi$.

2. Расширение класса оригиналов. Класс оригиналов можно расширить, включив в него функции, которые могут быть неограничены в окрестности конечного множества точек, но такие, что интеграл Лапласа от них тем не менее в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p>\sigma_0$ сходится абсолютно. К числу таких обобщенных оригиналов относится степенная функция $f(t)=t^\mu$ при $\mu>-1$, функция $\ln t$ и некоторые другие. В частности, к такому классу относится всякая функция $f(t)$, которая в некоторых точках $t=t_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ является бесконечно большой порядка, меньшего единицы, т. е. такая, что $\lim\limits_{t\to t_k}(t-t_k)^{r_k}f(t)=0$ при некотором $r_k<1$, и если вне некоторых окрестностей точек t_k она удовлетворяет условиям, при которых функцию можно считать оригиналом.

Пример 8. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)=t^\mu$, $\mu>-1$.

◀ Имеем $F(p)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}t^\mu\,dt$ или, после подстановки $pt=\tau$,

$$F(p)=\frac{1}{p^{\mu+1}}\int_0^{+\infty}e^{-\tau}\tau^\mu\,d\tau=\frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}.$$

Итак, $\frac{t^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\risingdotseq\frac{1}{p^{\mu+1}}$ [1]. ▶

---

[1]) Здесь под функцией комплексной переменной $1/p^{\mu+1}$ понимается та из ветвей этой многозначной функции, которая на вещественной положительной полуоси комплексной плоскости (p) принимает вещественные значения, т. е. $1/p^{\mu+1}=e^{-(\mu+1)\ln p}$. Аналогичное замечание относится к изображениям функций $t^\mu e^{\alpha t}$, $t^\mu e^{\alpha t}\ln t$, $t^\mu\cos\beta t$, $t^\mu\sin\beta t$.

З а м е ч а н и е. Если μ — целое положительное число, то $\Gamma(\mu+1)=\mu!$, и мы приходим к формуле 2 таблицы изображений.

П р и м е р 9. Найти изображение функции $f(t)=t^{\mu}\ln t$, $\mu>-1$.

◀ Из соответствия $t^{\mu} \doteqdot \frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}$ с помощью дифференцирования по параметру μ получаем

$$t^{\mu}\ln t \doteqdot \frac{\Gamma'(\mu+1)}{p^{\mu+1}}-\frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}\ln p=\frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}\left(\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}-\ln p\right).$$

В частности, положив $\mu=0$, с учетом того, что $\Gamma(1)=1$, $\Gamma'(1)=-\gamma$ ($\gamma=0{,}577215\ \ldots$ — *постоянная Эйлера*), получаем

$$\ln t \doteqdot -\frac{\gamma+\ln p}{p}. \ ▶$$

Найти изображения функций:

13.66. $f(t)=\frac{t^{\mu}e^{\alpha t}}{\Gamma(\mu+1)}$, $\mu>-1$.

13.67. $f(t)=\frac{t^{\mu}e^{\alpha t}\ln t}{\Gamma(\mu+1)}$, $\mu>-1$.

13.68. $f(t)=e^{\alpha t}\ln t$.

13.69. $f(t)=\frac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\cos\beta t$, $\mu>-1$.

13.70. $f(t)=\frac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\sin\beta t$, $\mu>-1$.

13.71. $f(t)=\cos\beta t\cdot\ln t$. 13.72. $f(t)=\sin\beta t\cdot\ln t$.

13.73. $f(t)=\begin{cases}0 & \text{при } 0\leqslant t<a,\\ \frac{1}{\sqrt{t-a}} & \text{при } t>a.\end{cases}$

§ 2. Восстановление оригинала по изображению

1. **Элементарный метод.** Во многих случаях заданное изображение можно преобразовать к такому виду, когда оригинал легко восстанавливается непосредственно с помощью свойств преобразования Лапласа и таблицы изображений.

Для преобразования изображения широко используется в этом случае метод разложения рациональной дроби в сумму простейших.

П р и м е р 1. Найти оригинал для функции

$$F(p)=\frac{1}{p^2+2p+5}.$$

◀ Первый способ. Выделяя полный квадрат в знаменателе и далее, используя табличное изображение для $\sin\beta t$ и теорему смещения, получаем:

$$\frac{1}{p^2+2p+5}=\frac{1}{(p+1)^2+4}=\frac{1}{2}\,\frac{2}{(p+1)^2+4}\doteqdot\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t.$$

Второй способ. Раскладывая дробь в сумму простейших и используя изображение для $e^{\alpha t}$, получаем

$$\frac{1}{p^2+2p+5}=\frac{1}{4i}\left(\frac{1}{p-(-1+2i)}-\frac{1}{p-(-1-2i)}\right)\doteqdot$$
$$\doteqdot\frac{1}{4i}\left(e^{(-1+2i)t}-e^{(-1-2i)t}\right)=\frac{1}{2}e^{-t}\,\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t. \ ▶$$

П р и м е р 2. Найти оригинал для функции $F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}$.

◀ Первый способ. Раскладывая дробь в сумму простейших, получаем

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{(p-i)^2(p+i)^2}=-\frac{1}{4}\left(\frac{i}{p-i}-\frac{i}{p+i}+\frac{1}{(p-i)^2}+\frac{1}{(p+i)^2}\right)\doteqdot$$
$$\doteqdot-\frac{1}{4}\left(ie^{it}-ie^{-it}+te^{it}+te^{-it}\right)=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$$

Второй способ. Заметим, что

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}=-\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)',$$

причем согласно теореме о дифференцировании изображения

$$-\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'\doteqdot t\sin t.$$

Применяя теперь теорему об интегрировании оригинала, находим

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}=-\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'\doteqdot\frac{1}{2}\int_0^t\tau\sin\tau\,d\tau=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$$

Третий способ. Используя теорему Бореля об изображении свертки, получаем

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\doteqdot\sin t*\sin t=\int_0^t\sin(t-\tau)\sin\tau\,d\tau=$$
$$=\sin t\int_0^t\cos\tau\sin\tau\,d\tau-\cos t\int_0^t\sin^2\tau\,d\tau=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$$

П р и м е р 3. Найти оригинал для функции $\frac{p^2e^{-2p}}{p^3+1}$.

◀ Найдем сначала оригинал для дроби $\frac{p^2}{p^3+1}$, причем в отличие от двух предыдущих примеров разложение дроби в сумму простейших произведем в множестве действительных чисел. Имеем:

$$\frac{p^2}{p^3+1}=\frac{p^2}{(p+1)(p^2-p+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p+1}+\frac{2p-1}{p^2-p+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p+1}+2\,\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)\doteqdot\frac{1}{3}\left(e^{-t}+2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

А теперь, применяя теорему запаздывания, учтем сомножитель e^{-2p}. Окончательно находим:

$$\frac{p^2 e^{-2p}}{p^3+1} \doteq \frac{1}{3}\,\eta(t-2)\left(e^{-(t-2)}+2e^{\frac{1}{2}(t-2)}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)\right). \blacktriangleright$$

Найти оригиналы для заданных функций:

13.74. $\dfrac{1}{(p-1)^2}$. **13.75.** $\dfrac{1}{(p+1)(p-3)}$.

13.76. $\dfrac{1}{p^2+4p+3}$. **13.77.** $\dfrac{1}{p^3+2p^2+p}$.

13.78. $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$. **13.79.** $\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

13.80. $\dfrac{p}{(p^2-4)(p^2+1)}$. **13.81.** $\dfrac{p}{(p^2+4)^2}$.

13.82. $\dfrac{p}{p^3+1}$. **13.83.** $\dfrac{p}{p^4+4}$.

13.84. $\dfrac{e^{-2p}}{p^2}$. **13.85.** $\dfrac{e^{-2p}}{(p+1)^3}$.

13.86. $\dfrac{1}{p-2}+\dfrac{e^{-p}}{p}+\dfrac{3e^{-4p}}{p^2+9}$. **13.87.** $\dfrac{p}{p^2+4}-\dfrac{2pe^{-p}}{p^2-4}$.

2. Формула обращения. Теоремы разложения. Если $f(t)$ — оригинал и $F(p)$ — его изображение, то в любой точке непрерывности $f(t)$ справедлива *формула обращения Меллина*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)\,e^{pt}\,dp,$$

где интегрирование производится по любой прямой $\operatorname{Re} p=\sigma$, $\sigma>\sigma_0$.

З а м е ч а н и е. Во всякой точке t_0, являющейся точкой разрыва функции $f(t)$, правая часть формулы Меллина равна $\frac{1}{2}\Big(f(t_0-0)+$ $+f(t_0+0)\Big)$.

Непосредственное применение формулы обращения часто затруднительно, и обычно пользуются теоремами разложения, являющимися следствиями из нее:

П е р в а я т е о р е м а р а з л о ж е н и я. *Если функция $F(p)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки и ее разложение в ряд по степеням $1/p$ имеет вид*

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}},$$

то функция

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{t^n}{n!},\quad t\geqslant 0 \qquad (f(t)=0 \text{ при } t<0)$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

В т о р а я т е о р е м а р а з л о ж е н и я. *Если изображение $F(p)$ является однозначной функцией и имеет лишь конечное число особых точек $p_1, p_2, \ldots, p_n$, лежащих в конечной части плоскости, то*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} \text{выч}\,[e^{pt}F(p);\ p_k].$$

Если, в частности, $F(p)=\dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, где $P_m(p)$ и $Q_n(p)$ — многочлены степеней m и n соответственно ($n>m$), $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — корни многочлена $Q_n(p)$ с кратностями, соответственно равными $l_1, l_2, \ldots, l_r$ ($l_1+l_2+\ldots+l_r=n$), то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{(l_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{l_k-1}}{dp^{l_k-1}}\left((p-p_k)^{l_k}F(p)\,e^{pt}\right). \qquad (1)$$

Если все коэффициенты многочленов $P_m(p)$ и $Q_n(p)$ — действительные числа, то в правой части (1) полезно объединить слагаемые, относящиеся к взаимно сопряженным комплексным корням; сумма каждой пары таких членов равна удвоенной действительной части одного из них.

В частном случае, когда все корни $p_1, p_2, \ldots, p_n$ многочлена $Q_n(p)$ простые, используя формулу для вычисления вычета относительно полюса первого порядка (см. с. 239), получим

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}\,e^{p_k t}. \qquad (2)$$

П р и м е р 4. Найти оригинал функции $F(p)=\dfrac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$.

◀ Первый способ. Разложение функции $F(p)$ в окрестности точки $p=\infty$ имеет вид

$$F(p)=\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\,p^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\,p^{n+1}}.$$

Поэтому, в соответствии с первой теоремой разложения, оригиналом для $F(p)$ является функция $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^n}{(n!)^2}=I_0(2\sqrt{t})$ (I_0 — функция Бесселя первого рода с нулевым индексом).

Второй способ. Воспользуемся второй теоремой разложения. Для этого надо найти вычет функции $\dfrac{1}{p}e^{pt}e^{-\frac{1}{p}}$ относительно ее единственной особой точки $p=0$ (это существенно особая точка), т. е. коэффициент при $1/p$ разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $p=0$. Имеем

$$\frac{1}{p}e^{pt}e^{-\frac{1}{p}}=\left(1+pt+\frac{p^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{p^nt^n}{n!}+\ldots\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2!\,p^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!\,p^{n+1}}+\ldots\right).$$

Выделив в произведении рядов члены, содержащие $1/p$, найдем:

$$f(t)=\text{выч}\left[\frac{1}{p}e^{pt}e^{-\frac{1}{p}};\ 0\right]=1-t+\frac{t^2}{(2!)^2}+\ldots+(-1)^n\frac{t^n}{(n!)^2}+\ldots=$$
$$=I_0(2\sqrt{t}).\ ►$$

В этом примере решение, использующее первую теорему разложения, оказалось более простым, чем решение при помощи второй теоремы разложения.

Пример 5. Найти оригинал для функции $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+\beta^2)^3}$.

◄ Воспользуемся второй теоремой разложения. Функция $F(p)$ имеет два полюса 3-го порядка $p=\pm\beta i$, и ее оригинал определяется равенством

$$f(t)=\text{выч}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\ \beta i\right]+\text{выч}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\ -\beta i\right]=$$
$$=2\,\mathrm{Re}\left(\text{выч}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\ \beta i\right]\right).$$

Имеем:

$$\text{выч}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\ \beta i\right]=\frac{1}{2!}\lim_{p\to\beta i}\frac{d^2}{dp^2}\left((p-\beta i)^3\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to\beta i}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{(p+\beta i)^3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to\beta i}\left(\frac{t^2e^{pt}}{(p+\beta i)^3}-\frac{6te^{pt}}{(p+\beta i)^4}+\frac{12e^{pt}}{(p+\beta i)^5}\right)=$$
$$=-\frac{t^2e^{\beta it}}{16\beta^3 i}-\frac{3te^{\beta it}}{16\beta^4}+\frac{3e^{\beta it}}{16\beta^5 i}$$

(при дифференцировании мы воспользовались формулой Лейбница для производной произведения). Выделив действительную часть этого выражения и удвоив ее, получим

$$f(t)=-\frac{t^2\sin\beta t}{8\beta^3}-\frac{3t\cos\beta t}{8\beta^4}+\frac{3\sin\beta t}{8\beta^5}.\ ►$$

Пример 6. Найти оригинал для функции $F(p)=\dfrac{1}{p^4-1}$.

◄ Знаменатель дроби здесь имеет только простые корни $p_{1,2}=\pm1$, $p_{3,4}=\pm i$. Поэтому в соответствии с формулой (2) получаем

$$f(t)=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{4p_k^3}e^{p_kt}=\frac{1}{4}\left(e^t-e^{-t}+\frac{e^{it}}{i^3}+\frac{e^{-it}}{(-i)^3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{e^t-e^{-t}}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}t-\sin t).\ ►$$

Этот пример можно было решить, исходя из разложения $\dfrac{1}{p^4-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p^2-1}-\dfrac{1}{p^2+1}\right)$.

Пользуясь первой теоремой разложения, найти оригиналы для заданных функций:

13.88. $\dfrac{1}{p}\cos\dfrac{1}{p}$. **13.89.** $\sin\dfrac{1}{p}$.

13.90. $\dfrac{1}{2p}\ln\dfrac{p+1}{p-1}$. **13.91.** $\dfrac{1}{p}e^{1/p^2}$.

13.92*. $\dfrac{1}{p-1}e^{-\frac{1}{p-1}}$.

Пользуясь второй теоремой разложения или с помощью разложения на элементарные дроби, найти оригиналы для заданных функций:

13.93. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+4p+5}$. **13.94.** $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

13.95. $F(p)=\dfrac{Q'(p)}{Q(p)}$, где $Q(p)=(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)$ и все числа p_k попарно различны.

13.96. $F(p)=\dfrac{1}{(p^4-1)^2}$. **13.97.** $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2(p^2-4)}$.

13.98. $F(p)=\dfrac{p^3}{(p^4-1)^2}$. **13.99.** $F(p)=\dfrac{p^5}{p^6-1}$.

13.100. $F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+1)^3}$. **13.101.** $F(p)=\dfrac{1}{p^3-4p+3}$.

13.102. $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p^2(p^2-1)^2}$. **13.103.** $F(p)=\dfrac{p}{p^4-5p^2+4}$.

13.104. $F(p)=\dfrac{p^3}{(p^4-1)(p^4+4)}$.

§ 3. Применения операционного исчисления

1. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами. Для того чтобы найти решение $x(t)$ линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(t) \qquad (1)$$

(где $f(t)$ — оригинал), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_0',\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}, \qquad (2)$$

следует применить к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа, т. е. от уравнения (1) с условиями (2) перейти к операторному уравнению

$$(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)X(p)+Q(p)=F(p),$$

где $X(p)$ — изображение искомого решения, $F(p)$ — изображение функции $f(t)$, а $Q(p)$ — некоторый многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных данных $x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ и который тождественно равен нулю, если $x_0=x_0'=\ldots=x_0^{(n-1)}=0$. Решив операторное уравнение относительно $X(p)$:

$$X(p)=\frac{F(p)-Q(p)}{L(p)}$$

($L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n$ — характеристический многочлен данного уравнения) и найдя оригинал для $X(p)$, мы получим искомое решение $x(t)$. Если считать $x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ произвольными постоянными, то найденное решение будет общим решением уравнения (1). Совершенно аналогично решаются и системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отличие будет лишь в том, что вместо одного операторного уравнения мы получим систему таких уравнений, которые будут линейными относительно изображений искомых функций.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $x''+2x'+x=te^{-t}$, а также его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_0=1$, $x_0'=2$.

◀ Пусть $x(t)\fallingdotseq X(p)$, тогда

$$x'(t)\fallingdotseq pX(p)-x_0,\quad x''(t)\fallingdotseq p^2X(p)-px_0-x_0'.$$

По таблице изображений находим $te^{-t}\fallingdotseq\frac{1}{(p+1)^2}$, и операторное уравнение имеет вид

$$(p^2+2p+1)\,X(p)-(p+2)\,x_0-x_0'=\frac{1}{(p+1)^2}.$$

Отсюда находим

$$X(p)=\frac{p+2}{(p+1)^2}\,x_0+\frac{1}{(p+1)^2}\,x_0'+\frac{1}{(p+1)^4}.$$

Для отыскания оригинала в данном случае проще всего представить $X(p)$ в следующем виде:

$$X(p)=\frac{(p+1)+1}{(p+1)^2}\,x_0+\frac{1}{(p+1)^2}\,x_0'+\frac{1}{(p+1)^4}=$$
$$=\frac{1}{(p+1)^4}+\frac{x_0+x_0'}{(p+1)^2}+\frac{x_0}{p+1}.$$

Пользуясь таблицей изображений, находим общее решение

$$x(t)=\frac{1}{3!}\,t^3e^{-t}+(x_0+x_0')\,te^{-t}+x_0e^{-t}.$$

Обозначив $x_0=C_1$, $x_0'+x_0=C_2$, его можно записать в виде

$$x(t)=\frac{1}{3}\,t^3e^{-t}+(C_1+C_2t)\,e^{-t}.$$

Частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$x(t)=\frac{1}{3}\,t^3e^{-t}+(1+3t)\,e^{-t}.\ ▶$$

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $x''+x=f(t)$ при нулевых начальных условиях, если

$$f(t)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\,t & \text{при } 0\leqslant t<\frac{\pi}{2},\\ \frac{2}{\pi}\,(\pi-t) & \text{при } \frac{\pi}{2}\leqslant t<\pi,\\ 0 & \text{при } t\geqslant\pi.\end{cases}$$

◀ Запишем $f(t)$ с помощью единичной функции Хевисайда:

$$f(t)=\left(1-\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)\frac{2}{\pi}\,t-\left(\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\eta(t-\pi)\right)\frac{2}{\pi}\,(t-\pi)=$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(t-2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\eta(t-\pi)(t-\pi)\right).$$

Пользуясь теоремой запаздывания, отсюда находим

$$f(t)\fallingdotseq F(p)=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}}{p^2}.$$

Так как начальные условия нулевые, то, полагая $x(t)\fallingdotseq X(p)$, приходим к операторному уравнению

$$(p^2+1)\,X(p)=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}}{p^2},$$

из которого после несложных преобразований находим

$$X(p)=\frac{2}{\pi}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}\right)\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}\right).$$

Так как $\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}\fallingdotseq t-\sin t$, то, снова применяя теорему запаздывания, находим

$$x(t)=\frac{2}{\pi}\left((t-\sin t)-2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\eta(t-\pi)\left((t-\pi)-\sin(t-\pi)\right)\right),$$

т. е.

$$x(t)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\,(t-\sin t) & \text{при } 0\leqslant t<\frac{\pi}{2},\\ \frac{2}{\pi}\,(-\sin t-2\cos t-t+\pi) & \text{при } \frac{\pi}{2}\leqslant t<\pi,\\ -\frac{4}{\pi}\cos t & \text{при } t\geqslant\pi.\ ▶\end{cases}$$

Пример 3. Найти решение системы

$$x'+y=e^t,$$
$$x+y'=e^{-t}$$

при начальных условиях $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$.

◀ Пусть $x(t)\fallingdotseq X(p)$, $y(t)\fallingdotseq Y(p)$, тогда $x'(t)\fallingdotseq pX(p)-x_0$, $y'(t)\fallingdotseq pY(p)-y_0$, и получаем операторную систему

$$pX(p)-x_0+Y(p)=\frac{1}{p-1},$$
$$pY(p)-y_0+X(p)=\frac{1}{p+1}.$$

Решая систему, найдем

$$X(p)=\frac{p}{p^2-1}x_0-\frac{1}{p^2-1}y_0+\frac{p^2+1}{(p^2-1)^2},$$

$$Y(p)=\frac{p}{p^2-1}y_0+\frac{1-x_0}{p^2-1}-\frac{2p}{(p^2-1)^2}$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} x(t)=x_0\operatorname{ch}t-y_0\operatorname{sh}t+t\operatorname{ch}t, \\ y(t)=y_0\operatorname{ch}t+(1-x_0)\operatorname{sh}t-t\operatorname{sh}t. \end{cases}$$ ▶

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

13.105. $x''+9x=\cos 3t$. **13.106.** $x''-4x'+4x=e^{2t}$.

13.107. $x''+2x'=te^{-2t}$. **13.108.** $x''+x'-2x=e^t$.

13.109. $x''+x'=e^{-t}\sin t$.

Найти решения дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

13.110. $x'''+x=0$; $x(0)=0$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=2$.

13.111. $x''+2x'+x=e^{-t}$; $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

13.112. $x''+3x'=e^{-3t}$; $x(0)=0$, $x'(0)=-1$.

13.113. $x''-2x'+2x=\sin t$; $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

13.114. $x''+4x=\sin 2t$; $x(0)=1$, $x'(0)=-2$.

13.115. $x''-9x=\operatorname{sh}t$; $x(0)=-1$, $x'(0)=3$.

13.116. $x'''-x''=e^t$; $x(0)=1$, $x'(0)=x''(0)=0$.

13.117. $x^{\text{IV}}-x=\operatorname{sh}t$; $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$, $x'''(0)=1$.

13.118. $x'''+3x''+3x'+x=te^{-t}$; $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

Найти при нулевых начальных условиях решения следующих дифференциальных уравнений:

13.119. $x'+x=f(t)$, где

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{при } 0\leqslant t<2, \\ 0 & \text{при } t\geqslant 2. \end{cases}$$

13.120. $x''+x=f(t)$, где

$$f(t)=\begin{cases} \cos t & \text{при } 0\leqslant t<\pi, \\ 0 & \text{при } t\geqslant\pi. \end{cases}$$

13.121. $x''-x'=f(t)$, где

$$f(t)=\begin{cases} e^{-t} & \text{при } 0\leqslant t<1, \\ 0 & \text{при } t\geqslant 1. \end{cases}$$

13.122. $x''+x=f(t)$, где

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{при } 0\leqslant t<1, \\ -1 & \text{при } 1\leqslant t<2, \\ 0 & \text{при } t\geqslant 2. \end{cases}$$

13.123.** С помощью интеграла Дюамеля доказать следующее утверждение: если $x_1(t)$ — решение уравнения $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=1$ при нулевых начальных условиях $(x(0)=x'(0)=\ldots=x^{(n-1)}(0)=0)$, то решением уравнения $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(t)$ при тех же начальных условиях является функция

$$x(t)=\int_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)\,d\tau=x_1(t)f(0)+\int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)\,d\tau$$

($f(t)$ — произвольный оригинал).

Замечание. Результат задачи 13.123 позволяет находить решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях, не находя изображения правой части этого уравнения.

Пользуясь результатом задачи 13.123, найти решения следующих дифференциальных уравнений:

13.124. $x'-x=\frac{1}{e^t+3}$. **13.125.** $x''-x=\frac{1}{1+e^t}$.

13.126. $x''-x'=\frac{1}{1+e^t}$. **13.127.** $x''+x=\frac{1}{2+\cos t}$.

13.128. $x''+x=e^{-t^2}$.

Найти общие решения систем дифференциальных уравнений

13.129. $x''+y'=t$, $y''-x'=0$. **13.130.** $x''+y'=\operatorname{sh}t-\sin t$, $y''+x'=\operatorname{ch}t-\cos t$.

Найти решения систем дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях.

13.131. $x'+y=0$, $x+y'=0$; $x(0)=1$, $y(0)=-1$.

13.132. $2x''+x-y'=-3\sin t$,
$x+y'=-\sin t$;
$x(0)=0$, $x'(0)=1$, $y(0)=0$.

13.133. $x''-y'=0$,
$x-y''=2\sin t$;
$x(0)=-1$, $x'(0)=y(0)=y'(0)=1$.

13.134. $x''-y'=0$,
$x'-y''=2\cos t$;
$x(0)=y'(0)=0$, $x'(0)=y(0)=2$.

13.135. $x'' - y' = e^t,$
$x' + y'' - y = 0;$
$x(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad x'(0) = y'(0) = 0.$

13.136. $x'' + y' = 2\sin t,$
$y'' + z' = 2\cos t,$
$z'' - x = 0;$
$x(0) = z(0) = y'(0) = 0, \qquad x'(0) = y(0) = -1, \qquad z'(0) = 1.$

Проинтегрировать при нулевых начальных условиях системы дифференциальных уравнений:

13.137. $x'' - y' = f_1(t),$ $y' + x = f_2(t),$ где $f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant t < \pi, \\ 0 & \text{при } \quad t \geqslant \pi, \end{cases}$

$$f_2(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leqslant t < \pi/2, \\ \pi - t & \text{при } \pi/2 \leqslant t < \pi, \\ 0 & \text{при } \quad t \geqslant \pi. \end{cases}$$

13.138. $x'' - y = 0,$ $y'' - x = f(t),$ где $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant t < \pi, \\ -1 & \text{при } \pi \leqslant t < 2\pi, \\ 0 & \text{при } \quad t \geqslant 2\pi. \end{cases}$

2. Решение линейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Используя теорему свертывания, можно легко найти изображения решений интегральных уравнений Вольтерра 1-го и 2-го рода (а в простейших случаях по найденному изображению найти и само решение) в том случае, когда ядром в соответствующем уравнении служит функция вида $K(t-\tau)$, где $K(t)$ — оригинал. Этот метод применим и к интегро-дифференциальным уравнениям с таким же ядром.

Пример 4. Найти решение *уравнения Вольтерра 1-го рода*

$$\int_0^t \cos(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = t \cos t.$$

◀ Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$; так как

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}, \quad t\cos t \risingdotseq \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2},$$

$$\int_0^t \cos(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{pX(p)}{p^2+1}$$

(по теореме свертывания), то приходим к операторному уравнению

$$\frac{pX(p)}{p^2+1} = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2},$$

откуда

$$X(p) = \frac{p^2-1}{p(p^2+1)} = \frac{2p}{p^2+1} - \frac{1}{p}.$$

Таким образом, $x(t) = 2\cos t - 1$. ▶

Пример 5. Найти решение уравнения $x'' + x = \sin t + \int_0^t \sin(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$ при начальных условиях $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

◀ Полагая $x(t) \risingdotseq X(p)$, имеем

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - 1, \quad \sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1},$$

$$\int_0^t \sin(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{X(p)}{p^2+1}.$$

Получаем операторное уравнение

$$(p^2+1)\, X(p) - 1 = \frac{1}{p^2+1} + \frac{X(p)}{p^2+1},$$

или

$$((p^2+1)^2 - 1)\, X(p) = p^2 + 2.$$

Отсюда находим $X(p) = \frac{1}{p^2}$ и $x(t) = t$. ▶

Решить следующие интегральные и интегро-дифференциальные уравнения:

13.139. $\int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \operatorname{ch} t - \cos t.$

13.140. $3\int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = x(t) - e^{-t}.$

13.141. $\int_0^t e^{t-\tau} \sin(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = x'' - x' + e^t(1-\cos t);$
$x(0) = x'(0) = 1.$

13.142. $\int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = x'' - x' + \frac{1}{2} t \operatorname{sh} t;$
$x(0) = 1, \ x'(0) = 0.$

Проинтегрировать *уравнения Абеля:*

13.143. $\int_0^t \frac{x(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \pi.$

13.144. $\int_0^t \frac{x(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = t^\beta, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad \beta > -1.$

3. Интегрирование линейных уравнений в частных производных. Применение операционных методов для интегрирования линейных уравнений в частных производных рассмотрим на примере.

Пример 6. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+z=\sin x\cos y$, удовлетворяющее условиям $z(0,\ y)=\sin y$, $z(x,\ 0)=0$ $(x\in[0,\ +\infty)$, $y\in[0,\ +\infty))$.

◀ Переходим к операторному уравнению относительно аргумента y, полагая $z(x,\ y)\risingdotseq Z(x,\ p)$. Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial y}\risingdotseq pZ(x,\ p)-z(x,\ 0)=pZ(x,\ p),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\risingdotseq\frac{\partial}{\partial x}(pZ(x,\ p))=pZ'_x(x,\ p)$$

(по теореме о дифференцировании операторных соотношений по параметру). Получаем операторное уравнение:

$$pZ'_x(x,\ p)+Z(x,\ p)=\frac{p\sin x}{p^2+1}\quad\left(\text{так как }\cos y\risingdotseq\frac{p}{p^2+1}\right).$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение по аргументу x, находим

$$Z(x,\ p)=C_1(p)\,e^{-\frac{x}{p}}+\frac{p}{(p^2+1)^2}\sin x-\frac{p^2}{(p^2+1)^2}\cos x.$$

В силу начального условия $Z(x,\ 0)=0$ и теоремы о связи начального значения оригинала и конечного значения изображения мы должны иметь $\lim\limits_{p\to\infty} pZ(x,p)=Z(x,0)=0$, откуда находим $\lim\limits_{p\to\infty} pC_1(p)=0$, причем если $C_1(p)\risingdotseq\varphi(y)$, то $\varphi(0)=0$ (в силу той же теоремы). Запишем теперь $Z(x,\ p)$ в следующем виде:

$$Z(x,\ p)=pC_1(p)\frac{1}{p}e^{-\frac{x}{p}}+\frac{p}{(p^2+1)^2}\sin x-\frac{1}{2}\,\frac{(p^2+1)+(p^2-1)}{(p^2+1)^2}\cos x.$$

Но так как

$$pC_1(p)\risingdotseq\varphi'(y),\quad \frac{1}{p}e^{-\frac{x}{p}}\risingdotseq I_0(2\sqrt{xy})$$

(см. решение примера 4 из § 2),

$$\frac{p}{(p^2+1)^2}\risingdotseq\frac{1}{2}\,y\sin y,\quad \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}\risingdotseq y\cos y,$$

то находим:

$$z(x,\ y)=\int_0^y\varphi'(t)\,I_0\left(2\sqrt{x(y-t)}\right)dt+\frac{1}{2}\,y\sin y\sin x-$$

$$-\frac{1}{2}(\sin y+y\cos y)\cos x=\int_0^y\varphi'(t)\,I_0\left(2\sqrt{x(y-t)}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\sin y\cos x-\frac{1}{2}\,y\cos(x+y)$$

(первое слагаемое получено по теореме свертывания оригиналов). Так как $I_0(0)=1$, то, полагая $x=0$, находим:

$$z(0,\ y)=\int_0^y\varphi'(t)\,dt-\frac{1}{2}\sin y-\frac{1}{2}\,y\cos y=$$

$$=\varphi(y)-\frac{1}{2}\sin y-\frac{1}{2}\,y\cos y=\sin y$$

(по начальным условиям); поэтому $\varphi(y)=\frac{3}{2}\sin y+\frac{1}{2}\,y\cos y$, $\varphi'(y)=2\cos y-\frac{1}{2}\,y\sin y$, и окончательно находим

$$z(x,\ y)=\int_0^y\left(2\cos t-\frac{1}{2}\,t\sin t\right)I_0\left(2\sqrt{x(y-t)}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\sin y\cos x-\frac{1}{2}\,y\cos(x+y).\ ▶$$

Проинтегрировать следующие линейные уравнения в частных производных:

13.145. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=\cos x$; $z(0,\ y)=y$, $z'_x(0,\ y)=0$.

13.146. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial y}-a^2z=f(x)$; $z(0,\ y)=-y$, $z'_x(0,\ y)=0$.

13.147**. Уравнения длинной линии в случае отсутствия потерь (линейное сопротивление R и утечка G равны нулю) имеют вид:

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}=-L\frac{\partial i(x,\ t)}{\partial t},\qquad\qquad (3)$$

$$\frac{\partial i(x,\ t)}{\partial x}=-C\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x},$$

где $u(x,\ t)$ — напряжение, $i(x,\ t)$ — ток в точках линии в момент времени t, L — индуктивность и C — емкость, отнесенные к единице длины. Найти решения уравнений (3), удовлетворяющие начальным условиям

$$u(x,\ 0)=i(x,\ 0)=0\qquad\qquad (4)$$

и граничному условию

$$u(0,\ t)=q(t)=E\sin\omega t.$$

13.148. В уравнениях длинной линии

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} - Ri(x,t),$$
$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -C\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - Gu(x,t), \tag{5}$$

в случае линии без искажений, величины R, L, C и G связаны соотношениями $\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = \nu$. Найти решения уравнений (5), удовлетворяющие начальным условиям (4) и граничному условию

$$u(0, t) = q(t) = E(\eta(t) - \eta(t-\tau)), \quad \tau > 0.$$

4. Вычисление несобственных интегралов. Один из способов вычисления несобственных интегралов вида $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ основан на применении теоремы операционного исчисления о связи «конечного» значения оригинала и «начального» значения изображения: если $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$ и существует конечный предел $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty)$, то $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty) = \lim_{p\to 0} p\Phi(p)$ (см. задачу 13.15).

Из этой теоремы и соотношения

$$\int_0^t f(t)\,dt \risingdotseq \frac{1}{p}F(p) \quad (f(t) \risingdotseq F(p))$$

при условии сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ следует соотношение

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = F(0). \tag{6}$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

◀ Так как $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$, то по теореме интегрирования изображения имеем

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} \frac{dq}{q^2+1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p,$$

поэтому по формуле (1) находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t\,dt}{t} = \frac{\pi}{2}. \ ▶$$

Пусть функции $f(t, u)$ и $\psi(t) = \int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u)\,du$ являются оригиналами и $f(t, u) \risingdotseq F(p, u)$. Тогда, применяя теорему об интегрировании по параметру, будем иметь

$$\psi(t) \risingdotseq \Psi(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(u) F(p, u)\,du.$$

Поэтому, если интеграл, определяющий $\Psi(p)$, можно вычислить, то для отыскания интеграла $\int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u)\,du$ достаточно найти оригинал для $\Psi(p)$, т. е.

$$\int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u)\,du \risingdotseq \int_0^{+\infty} \varphi(u) F(p, u)\,du. \tag{7}$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu\,du}{\alpha^2+u^2}$.

◀ Имеем $\cos tu \risingdotseq \frac{p}{p^2+u^2}$. Поэтому (по формуле (7))

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu\,du}{\alpha^2+u^2} \risingdotseq \int_0^{+\infty} \frac{p\,du}{(p^2+u^2)(\alpha^2+u^2)} = \frac{p}{p^2-\alpha^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{du}{\alpha^2+u^2} - \frac{du}{p^2+u^2}\right) =$$
$$= \frac{p}{p^2-\alpha^2}\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}\right) = \frac{\pi}{2\alpha}\,\frac{1}{p+\alpha}.$$

Но $\frac{1}{p+\alpha} \risingdotseq e^{-\alpha t}$. Отсюда

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu\,du}{\alpha^2+u^2} = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha t}. \ ▶$$

Еще один способ вычисления несобственных интегралов при помощи операционного исчисления дает

Теорема Парсеваля. *Если $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$ и функции $F_1(p)$ и $F_2(p)$ аналитичны при $\operatorname{Re} p \geq 0$, то*

$$\int_0^{+\infty} f_1(u) F_2(u)\,du = \int_0^{+\infty} F_1(v) f_2(v)\,dv. \tag{8}$$

При этом из сходимости одного из этих интегралов следует сходимость другого[1].

---

[1]) Если для одной из функций $F_1(p)$ или $F_2(p)$ условие аналитичности выполнено лишь при $\operatorname{Re} p > 0$, то сходимость одного из интегралов может не иметь места.

Пример 9. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}\sin\beta u}{u}\,du$, $\alpha > 0$.

◀ Имеем $e^{-\alpha t}\sin\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$, $\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$. Полагая $f_1(u) = e^{-\alpha u}\sin\beta u$, $F_2(u) = \frac{1}{u}$, имеем $F_1(v) = \frac{\beta}{(v+\alpha)^2+\beta^2}$, $f_2(v) = \eta(v)$. Поэтому по формуле (8)

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}\sin\beta u\,du}{u} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\beta\eta(v)\,dv}{(v+\alpha)^2+\beta^2} = \beta\int\limits_0^{+\infty} \frac{dv}{(v+\alpha)^2+\beta^2}$$

($\eta(v) = 1$, так как $v > 0$). Но

$$\beta\int\limits_0^{+\infty} \frac{dv}{(v+\alpha)^2+\beta^2} = \operatorname{arctg}\frac{v+\alpha}{\beta}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}\sin\beta u\,du}{u} = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha},\quad \alpha > 0. \ ▶$$

Вычислить несобственные интегралы, используя формулу (6):

13.149. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\cos\gamma t}{t}\,dt$, $\alpha, \beta > 0$.

13.150*. $\int\limits_0^{+\infty} t^{\mu}e^{-\alpha t}\ln t\,dt$, $\alpha > 0$, $\mu > -1$.

Вычислить несобственные интегралы, используя формулу (7):

13.151. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{u\sin tu\,du}{u^2+\alpha^2}$. **13.152.** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\,du$.

Вычислить несобственные интегралы, используя теорему Парсеваля (формула (8)):

13.153. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{\sqrt{u}}\,du$, $\alpha, \beta > 0$.

13.154. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha u - \sin\beta u}{u\sqrt{u}}\,du$, $\alpha, \beta > 0$;

13.155*. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx$, $\alpha, \beta > 0$.

5. Суммирование рядов. Методы операционного исчисления могут быть использованы при суммировании числовых и функциональных рядов.

Пример 10. Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$ (область аналитичности $F(p)$: $\operatorname{Re} p \geq k$). Доказать, что сумма S ряда $\sum\limits_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n)$ может быть найдена по формуле

$$S = (\pm 1)^k \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}f(t)\,dt}{1 \mp e^{-t}}. \tag{9}$$

◀ По условию $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt$. Имеем: $\frac{(\pm 1)^k e^{-kt}}{1 \mp e^{-t}} = \sum\limits_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}$. Поэтому

$$(\pm 1)^k \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}f(t)\,dt}{1 \mp e^{-t}} = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\sum\limits_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}\,dt =$$

$$= \sum\limits_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n \int\limits_0^{+\infty} e^{-nt}f(t)\,dt = \sum\limits_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n). \ ▶$$

Используя формулу (9), найти суммы следующих числовых рядов:

13.156.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)^2}$. **13.157**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2}{n^2}$.

13.158*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$. **13.159*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{3}{n^2+3n+1}$.

Пример 11. Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$ (область аналитичности $F(p)$: $\operatorname{Re} p \geq 0$). Пусть, кроме того, $\Phi(t, x)$ — производящая функция бесконечной последовательности функций $\varphi_n(x)$, т. е.

$$\Phi(t, x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)t^n.$$

Доказать, что сумма $S(x)$ сходящегося на $[a, b]$ функционального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F(n)\varphi_n(x)$ может быть найдена по формуле

$$S(x) = \int\limits_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x)f(t)\,dt. \tag{10}$$

◀ Имеем:

$$\int_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x) f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) e^{-nt}\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) F(n) = S(x). \ ▶$$

Используя формулу (10), с помощью подходящей производящей функции просуммировать следующие ряды:

13.160*. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

13.161*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

13.162.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $x \in (0, \pi)$.

13.163*. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n}$, $x \in (0, \pi)$.

6. Применение операционного исчисления при расчете электрических цепей. Методы операционного исчисления широко используются при расчетах процессов, протекающих в электрических цепях. Пусть $i(t)$ и $u(t)$, соответственно, ток и напряжение в цепи. Применение операторного метода основано на справедливости законов Кирхгофа для операторных тока $I(p) \risingdotseq i(t)$ и напряжения $U(p) \risingdotseq u(t)$. На основании закона Ома для основных элементов электрической цепи могут быть записаны следующие соотношения:

$$u_R(t) = Ri(t)$$

для сопротивления R,

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

для индуктивности L и

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + u_C(0)$$

для емкости C. Переходя к изображениям, отсюда получаем

$$U_R(p) = RI(p),$$
$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0),$$
$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{1}{p} u_C(0).$$

Используя закон Ома в операторной форме, для произвольного участка цепи можем записать

$$U(p) = Z(p) I(p), \tag{11}$$

где $Z(p)$ — операторное сопротивление указанного участка цепи. Для участков с сопротивлением R, индуктивностью L или емкостью C при нулевых начальных условиях операторное сопротивление имеет, соответственно, вид:

$$Z_R(p) = R,\ Z_L(p) = Lp,\ Z_C(p) = \frac{1}{Cp}.$$

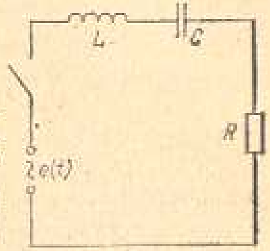

Рис. 101

При ненулевых начальных условиях к имеющимся в цепи источникам э.д.с. добавляются дополнительные источники. Величины э.д.с. дополнительных источников определяются запасами энергии в индуктивности и емкости и равны в операторном виде, соответственно, $Li(0)$ и $-\frac{1}{p}u_C(0)$.

Соотношение (11) является основным для расчетов заданного участка цепи в операторной форме.

Пример 12. Найти ток $i(t)$ в цепи, изображенной на рисунке 101 при подключении постоянной э.д.с. $e(t) = E$. Начальные условия нулевые.

◀ Так как $e(t) = E \risingdotseq E/p$, то, используя соотношение (11), находим

$$Z(p)\,I(p) = E/p, \tag{12}$$

где операторное сопротивление $Z(p)$ цепи, изображенной на рис. 101, имеет вид

$$Z(p) = Z_L(p) + Z_C(p) + Z_R(p) = Lp + \frac{1}{Cp} + R,$$

в силу нулевых начальных условий. Подставляя полученное выражение для $Z(p)$ в (12), находим

$$I(p) = \frac{E}{pZ(p)} = \frac{E}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} = \frac{E}{L}\,\frac{1}{\left(p + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)}. \tag{13}$$

Для отыскания оригинала $i(t)$ следует рассмотреть три случая в зависимости от вида корней квадратного трехчлена в правой части выражения (13).

Пусть $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$, тогда по формуле 10 таблицы изображений находим

$$i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}\, e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\; t.$$

Пусть $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$, тогда воспользуемся формулой 3 той же таблицы

$$i(t) = \frac{E}{L}\, t e^{-\frac{R}{2L}t},$$

Наконец, если $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$, то комбинируя формулы 8 и 3, находим:

$$i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}\, e^{-\frac{R}{2L}t}\, \mathrm{sh}\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\, t. \blacktriangleright$$

13.164. Найти ток $i(t)$ в RC-цепи (последовательно включены сопротивление R и ёмкость C) при подключении постоянной э.д.с. $e(t)=E$, если $u_C(0)=u_0$.

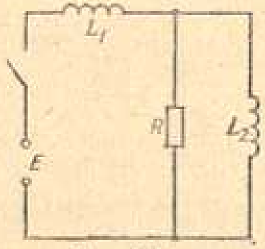

Рис. 102

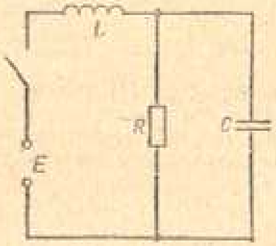

Рис. 103

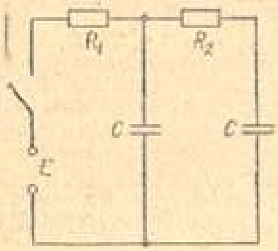

Рис. 104

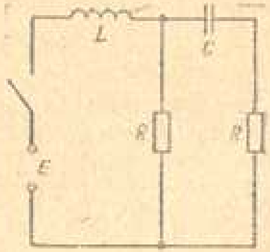

Рис. 105

13.165. Найти ток $i(t)$ в RL-цепи (последовательно включены сопротивление R и индуктивность L) при подключении постоянной э.д.с. $e(t)=E$.

13.166. Найти ток $i(t)$ в цепи, изображенной на рис. 101, при подключении постоянной э.д.с. $e(t)=E$, если $u_C(0)=u_0$.

Для изображенных на рис. 102—105 электрических цепей определить напряжение на указанном элементе цепи при подключении постоянной э.д.с. $e(t)=E$ (там, где необходимо, положить $u_C(0)=0$):

13.167. рис. 102. $u_{L_1}(t)=?$ **13.168.** рис. 103. $u_L(t)=?$
13.169. рис. 104. $u_{R_1}(t)=?$ **13.170.** рис. 105. $u_C(t)=?$

При расчете электрических цепей, когда воздействие на схему представляет собой функцию произвольного вида, полезно использовать интеграл Дюамеля (см. § 1, свойство 11 преобразования Лапласа). Сначала определяется переходная характеристика цепи — закон изменения напряжения или тока при подаче на вход схемы единичного воздействия $e(t)=\eta(t)$. В этом случае, из соотношения (11) находим операторный ток $I_1(p)=\frac{1}{pZ(p)}$, где $Z(p)$ — операторное сопротивление всей цепи.

Если теперь на вход схемы подается произвольное $e(t)$, то операторный ток $I(p)$ имеет вид:

$$I(p)=\frac{U(p)}{Z(p)}=pI_1(p)\,U(p),$$

где $U(p) \risingdotseq e(t)$. Применяя формулу Дюамеля, окончательно находим:

$$i(t)=e(0)\,i_1(t)+\int_0^t e'(\tau)\,i_1(t-\tau)\,d\tau \Rightarrow$$

$$= e(0)\,i_1(t)+\int_0^t e'(t-\tau)\,i_1(\tau)\,d\tau = e(0)\,i_1(t)+e' * i_1. \quad (14)$$

Пример 13. Найти ток в RL-цепи при подключении э.д.с. $e(t)=e^{\mu t}$.

◀ Сначала определяем переходную характеристику цепи, в данном случае ток $i_1(t)$, возникающий в RL-цепи при подключении э.д.с. $e(t)=\eta(t)$. Имеем (см. ответ к задаче 13.165)

$$i_1(t)=\frac{1}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Для определения тока $i(t)$ воспользуемся формулой (14). Предварительно вычислим второе слагаемое:

$$e' * i_1=\int_0^t e'(t-\tau)\,i_1(\tau)\,d\tau \Rightarrow$$

$$=\frac{\mu}{R}\int_0^t e^{\mu(t-\tau)}\left(1-e^{-\frac{R}{L}\tau}\right)d\tau=\frac{\mu}{R}e^{\mu t}\int_0^t\left(e^{-\mu\tau}-e^{-\tau\left(\mu+\frac{R}{L}\right)}\right)d\tau=$$

$$=\frac{\mu}{R}e^{\mu t}\left(-\frac{1}{\mu}e^{-\mu\tau}\Big|_0^t+\frac{1}{\mu+\frac{R}{L}}e^{-\tau\left(\mu+\frac{R}{L}\right)}\Big|_0^t\right)=$$

$$=\frac{1}{L\left(\mu+\frac{R}{L}\right)}\left(e^{\mu t}-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Теперь окончательно находим

$$i(t)=e(0)\,i_1(t)+e' * i_1=\frac{1}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{R/L}{\mu+\frac{R}{L}}\left(e^{\mu t}-e^{-\frac{R}{L}t}\right)\right). \blacktriangleright$$

13.171. Найти ток в RL-цепи при включении синусоидальной э.д.с. $e(t)=E\sin\omega t$.

13.172. Найти ток в RC-цепи, в которую при нулевых начальных условиях подключена э.д.с. $e(t)=Ete^{-\frac{1}{CR}t}$.

13.173. К электрическому контуру, изображенному на рис. 101, подключена э.д.с. вида $e(t)=Et^2e^{-\frac{R}{2L}t}$ $\left(\frac{1}{LC}>\frac{R^2}{4L^2}\right)$. Найти ток в контуре (начальные условия нулевые).

§ 4. Дискретное преобразование Лапласа и его применение

1. Z-преобразование и дискретное преобразование Лапласа. Z-*преобразованием* числовой (действительной или комплексной) бесконечной последовательности (a_n) называется функция комплексной переменной $F(z)$, определяемая следующим образом:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}. \tag{1}$$

Если последовательность (a_n) удовлетворяет условию $|a_n|<Me^{\alpha n}$ ($M>0$, α — постоянные), то функция $F(z)$ будет аналитической в области $|z|>e^{\alpha}$, т. е. вне круга с центром в нулевой точке и радиусом $R=e^{\alpha}$.

Формула (1) дает разложение $F(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки (являющейся правильной точкой $F(z)$), поэтому для восстановления последовательности (a_n) по ее Z-преобразованию надо $F(z)$ любым способом разложить в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки; в частности, можно воспользоваться формулой для определения коэффициентов этого разложения (см. формулу (2) § 5 гл. 12)

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\,z^{n-1}\,dz \tag{2}$$

(C — контур, внутри которого лежат все особые точки функции $F(z)$ [1]).

Пример 1. Восстановить (a_n) по ее Z-преобразованию $F(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$.

[1]) Формула (2) является фактически формулой обращения Z-преобразования.

◀ Имеем: $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}=\dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{z-a}-\dfrac{1}{z-b}\right)=\dfrac{1}{(a-b)z}\left(\dfrac{1}{1-\frac{a}{z}}-\dfrac{1}{1-\frac{b}{z}}\right)=\dfrac{1}{a-b}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n-b^n}{z^{n+1}}$. Таким образом, $a_n=\dfrac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}$ при $n\geqslant 1$, $a_0=0$. ▶

Введем вместо последовательности (a_n) решетчатую функцию $f(n)$, полагая $a_n=f(n)$. По-прежнему $f(n)$ удовлетворяет условию $|f(n)|<Me^{\alpha n}$, и примем дополнительно, что $f(n)=0$ при $n<0$; такие решетчатые функции будем называть *дискретными оригиналами*. *Дискретное преобразование Лапласа* функции $f(n)$ мы получим, если в Z-преобразовании положим $z=e^q$:

$$F^*(q)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\,e^{-nq}. \tag{3}$$

Связь между дискретным оригиналом $f(n)$ и его изображением $F^*(q)$ обозначают символом $f(n)\risingdotseq F^*(q)$ (иногда пишут $F^*(q)=D[f(n)]$). Изображение $F^*(q)$ — функция комплексной переменной с периодом 2π, при этом в основной полосе $-\pi<\operatorname{Im}q\leqslant\pi$ она аналитична при $\operatorname{Re}q>\alpha$. Таким образом, все ее особые точки лежат в этой полосе слева от прямой $\operatorname{Re}q=\alpha$.

Из формулы (3) вытекает следующая формула обращения дискретного преобразования Лапласа:

$$f(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-\pi i}^{\gamma+\pi i}F^*(q)\,e^{nq}\,dq. \tag{4}$$

Пример 2. $f(n)=a^n$, найти $F^*(q)$.

◀ Имеем $F^*(q)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^ne^{-nq}=\dfrac{1}{1-ae^{-q}}=\dfrac{e^q}{e^q-a}$; а потому $a^n\risingdotseq\dfrac{e^q}{e^q-a}$. Полагая $a=1$, получим $1^n=\eta(n)\risingdotseq\dfrac{e^q}{e^q-1}$. ▶

Свойства дискретного преобразования Лапласа (всюду ниже предполагается $f_j(n)\risingdotseq F_j^*(q)$):

1. Линейность.

$$\sum_{j=1}^{r}C_jf_j(n)\risingdotseq\sum_{j=1}^{r}C_jF_j^*(q).$$

2. Формула смещения.

$$e^{\alpha n}f(n)\risingdotseq F^*(q-\alpha).$$

3. Формулы запаздывания и опережения.

а) $$f(n-k)\risingdotseq e^{-kq}F^*(q),$$

б) $$f(n+k)\risingdotseq e^{kq}\left(F^*(q)-\sum_{r=0}^{k-1}f(r)\,e^{-rq}\right).$$

4. Дифференцирование по параметру.

Если $f(n,x) \risingdotseq F^*(q,x)$, то $\dfrac{\partial f(n,x)}{\partial x} \risingdotseq \dfrac{\partial F^*(q,x)}{\partial x}$.

5. Дифференцирование и интегрирование изображения.

а)
$$n^k f(n) \risingdotseq (-1)^k \frac{d^k}{dq^k} F^*(q),$$

б)
$$\frac{f(n)}{n} \risingdotseq \int_q^{\infty} (F^*(s) - f(0))\,ds \quad (n \geq 1).$$

6. Изображение конечных разностей оригинала.

$$\Delta^k f(n) \risingdotseq (e^q-1)^k F^*(q) - e^q \sum_{r=0}^{k-1} (e^q-1)^{k-r-1} \Delta^r f(0).$$

7. Изображение конечных сумм оригинала.

Если $g(n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k)$, то $g(n) \risingdotseq \dfrac{F^*(q)}{e^q-1}$.

8. Умножение изображений. Если

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{r=0}^{n} f_1(r) f_2(n-r)$$

(это — так называемая «свертка» оригиналов), то

$$f_1(n) * f_2(n) \risingdotseq F_1^*(q) \cdot F_2^*(q).$$

Приведем таблицу изображений основных решетчатых функций:

№	$f(n)$	$F^*(q)$
1	$f(n) = \begin{cases} C, & n=0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	C
2	$\eta(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$\dfrac{e^q}{e^q-1}$
3	a^n	$\dfrac{e^q}{e^q-a}$
4	$e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^q}{e^q-e^{\alpha}}$
5	n	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^2}$
6	n^2	$\dfrac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^3}$

№	$f(n)$	$F^*(q)$
7	$\dfrac{n^{[2]}}{2!} = \dfrac{n(n-1)}{2} = C_n^2$	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^3}$
8	$\dfrac{n^{[k]}}{k!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = C_n^k$	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^{k+1}}$
9	$\sin \beta n$	$\dfrac{e^q \sin\beta}{e^{2q} - 2e^q\cos\beta + 1}$
10	$\cos \beta n$	$\dfrac{e^q(e^q - \cos\beta)}{e^{2q} - 2e^q\cos\beta + 1}$
11	$\operatorname{sh} \beta n$	$\dfrac{e^q \operatorname{sh}\beta}{e^{2q} - 2e^q\operatorname{ch}\beta + 1}$
12	$\operatorname{ch} \beta n$	$\dfrac{e^q(e^q - \operatorname{ch}\beta)}{e^{2q} - 2e^q\operatorname{ch}\beta + 1}$
13	$\dfrac{n^{[k]}}{k!} e^{\alpha n} = C_n^k e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^{q+k\alpha}}{(e^q-e^{\alpha})^{k+1}}$
13′	$\dfrac{n^{[k]}}{k!} a^n = C_n^k a^n$	$\dfrac{a^k e^q}{(e^q-a)^{k+1}}$

Пример 3. Найти изображение функции $f(n) = e^{\alpha n} \sin \beta n$.

◀ Применяем теорему смещения (свойство 2) и, используя формулу 9 таблицы изображений, находим $e^{\alpha n}\sin\beta n \risingdotseq F(q-\alpha) = \dfrac{e^{q-\alpha}\sin\beta}{e^{2(q-\alpha)} - 2e^{q-\alpha}\cos\beta + 1} = \dfrac{e^{q+\alpha}\sin\beta}{e^{2q} - 2e^{q+\alpha}\cos\beta + e^{2\alpha}}$. В частности,

$$a^n \sin\beta n = e^{n\ln a}\sin\beta n \risingdotseq \frac{ae^q\sin\beta}{e^{2q} - 2ae^q\cos\beta + a^2}. ▶$$

Найти изображения следующих решетчатых функций:

13.174. $f(n) = e^{\alpha n}\cos\beta n$. **13.175.** $f(n) = a^n \cos\beta n$.

13.176. $f(n) = n^2 e^{\alpha n}$. **13.177.** $f(n) = n^2 a^n$.

13.178*. $f(n) = \dfrac{(n-1)^{[k]}}{k!} = C_{n-1}^k$.

13.179*. $f(n) = \dfrac{(n+m)^{[k]}}{k!} = C_{n+m}^k$. **13.180**.** $f(n) = \dfrac{\sin\beta n}{n}$.

Пример 4. Найти решетчатую функцию $f(n)$ по ее изображению $F^*(q) = \dfrac{e^q}{(e^{2q}-9)^2}$.

◀ Первый способ. Разложим на простейшие дроби функцию

$$\frac{F^*(q)}{e^q} = \frac{1}{(e^{2q}-9)^2}.$$

положив $e^q = z$:

$$\frac{1}{(z^2-9)^2} = \frac{1}{36}\left(\frac{1}{(z-3)^2}+\frac{1}{(z+3)^2}\right) - \frac{1}{108}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+3}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{e^{2q}}{(e^{2q}-9)^2} = \frac{1}{108}\left(\frac{3e^q}{(e^q-3)^2}+\frac{3e^q}{(e^q+3)^2}-\frac{e^q}{e^q-3}+\frac{e^q}{e^q+3}\right).$$

Но по формулам 3 и 13' таблицы изображений имеем:

$$\frac{e^q}{e^q-3} \doteqdot 3^n, \quad \frac{e^q}{e^q+3} \doteqdot (-3)^n,$$

$$\frac{3e^q}{(e^q-3)^2} \doteqdot n3^n, \quad \frac{3e^q}{(e^q+3)^2} \doteqdot -n(-3)^n.$$

Отсюда после элементарных преобразований находим:

$$\frac{e^q}{(e^{2q}-9)^2} \doteqdot \frac{3^{n-3}(n-1)(1-(-1)^n)}{4}.$$

Второй способ. Переходим к Z-преобразованию (полагая $e^q = z$): $\frac{e^q}{(e^{2q}-9)^2} = \frac{z}{(z^2-9)^2}$. Используя формулу обращения (2) и применяя теорему о вычетах, получаем

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z}{(z^2-9)^2} z^{n-1}\,dz =$$

$$= \text{выч}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2};\ 3\right] + \text{выч}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2};\ -3\right].$$

Но

$$\text{выч}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2};\ 3\right] = \lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^n}{(z+3)^2}\right) = \lim_{z\to 3}\left(\frac{nz^{n-1}}{(z+3)^2}-\frac{2z^n}{(z+3)^3}\right) = \frac{(n-1)\cdot 3^{n-3}}{4}.$$

Аналогично

$$\text{выч}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2};\ -3\right] = -(-1)^n\frac{(n-1)3^{n-3}}{4}.$$

Суммируя эти вычеты, приходим к прежнему результату. ►

Найти решетчатые функции по их изображениям

13.181. $F^*(q) = \frac{e^q}{(e^q-1)(e^{2q}-4)}$. **13.182.** $F^*(q) = \frac{e^q}{e^{4q}+1}$.

13.183*. $F^*(q) = \frac{e^{2q}}{e^{2q}+2e^q+2}$.

Пример 5. Найти сумму $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\cos k\beta$.

◄ Используем свойство 7 дискретного преобразования Лапласа:

$$f(n) \doteqdot \frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1} = F^*(q),$$

поэтому

$$S_n \doteqdot \frac{F^*(q)}{e^q-1} = \frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{(e^q-1)(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)}.$$

Разлагая на простейшие множители дробь

$$(e^q-\cos\beta)/(e^q-1)(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)$$

и добавляя множитель e^q, находим

$$\frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{(e^q-1)(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^q}{e^q-1}-\frac{e^q(e^q-2\cos\beta-1)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}\right).$$

Но $\frac{e^q}{e^q-1} \doteqdot \eta(n)$ (формула 2 таблицы изображений). Следовательно,

$$\frac{e^q(e^q-2\cos\beta-1)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1} = \frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1} - \frac{e^q(1+\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1} \doteqdot$$

$$\doteqdot \cos\beta n - \frac{1+\cos\beta}{\sin\beta}\sin\beta n.$$

Таким образом,

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\eta(n)-\cos\beta n+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\sin\beta n\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{2n-1}{2}\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n-1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}} \quad (n \geqslant 1). \ ►$$

Найти следующие суммы:

13.184. $\sum_{k=r}^{n-1}\frac{k^{[r]}}{r!} = \sum_{k=r}^{n-1} C_k^r$. **13.185.** $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \sin k\beta$;

13.186*. $\sum_{k=1}^{n-1} k^2(n-k)^2$.

Пример 6. Найти сумму степенного ряда

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}\right)t^n = 1+\sqrt{2}\,t+t^2-t^4-\sqrt{2}\,t^5-t^6+\ldots$$

◄ Данный ряд сходится при $|t| < 1$, так как $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Заменяя t на e^{-q}, приходим к дискретному изображению функции $f(n) = \cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}$:

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}\right)e^{-nq}.$$

Но

$$\cos\frac{n\pi}{4}\risingdotseq\frac{e^q\left(e^q-\cos\frac{\pi}{4}\right)}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{4}+1};\quad \sin\frac{n\pi}{4}\risingdotseq\frac{e^q\sin\frac{\pi}{4}}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{4}+1}$$

(см. формулы 9 и 10 таблицы изображений). Поэтому

$f(n)=$

$$=\cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}\risingdotseq\frac{e^q\left(e^q-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+e^q\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{2q}-\sqrt{2}e^q+1}=\frac{e^{2q}}{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q+1}.$$

Отсюда, возвращаясь к аргументу t, находим

$$S(t)=\frac{t^{-2}}{t^{-2}-\sqrt{2}t^{-1}+1}=\frac{1}{1-t\sqrt{2}+t^2}. ▶$$

Найти суммы следующих степенных рядов:

13.187. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}t^n$.

13.188. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-\sin\frac{n\pi}{3}\right)t^n$.

2. Решение разностных уравнений. Пусть дано уравнение

$$a_0x(n+k)+a_1x(n+k-1)+\ldots+a_kx(n)=\varphi(n) \tag{5}$$

($a_0, a_1, \ldots, a_k$ — постоянные) с заданными (или произвольными) начальными условиями: $x(0)=x_0$, $x(1)=x_1$, ..., $x(k-1)=x_{k-1}$. Правая часть уравнения (5) — решетчатая функция $\varphi(n)$ — предполагается оригиналом.

Полагая $x(n)\risingdotseq X^*(q)$ и применяя формулу опережения (свойство 3, б)), составляем операторное уравнение (оно линейно относительно $X^*(q)$) и определяем из него $X^*(q)$. Затем одним из способов, изложенных в п. 1, по изображению найдем искомое решение $x(n)$.

Если исходное уравнение было задано не через последовательные значения неизвестной функции, а через ее конечные разности, т. е. имеет вид

$$b_0\Delta^kx(n)+b_1\Delta^{k-1}x(n)+\ldots+b_kx(n)=\psi(n), \tag{6}$$

то вследствие громоздкости формул для отыскания изображений конечных разностей решетчатых функций (п. 1, свойство 6) его следует предварительно преобразовать к виду (5) при помощи известных формул, связывающих конечные разности функции с ее последовательными значениями:

$\Delta^rx(n)=$

$$=x(n+r)-C_r^1x(n+r-1)+C_r^2x(n+r-2)+\ldots+(-1)^rx(n). \tag{7}$$

Аналогично решаются и системы разностных уравнений.

Пример 7. Решить уравнение $x_{n+2}-x_{n+1}+x_n=0$, $x_0=1$, $x_1=2$.

◀ Полагаем $x_n\risingdotseq X^*(q)$. По формуле опережения находим:

$$x_{n+1}\risingdotseq e^q(X^*(q)-x_0)=e^q(X^*(q)-1)=e^qX^*(q)-e^q,$$

$$x_{n+2}\risingdotseq e^{2q}(X^*(q)-x_0-x_1e^{-q})=e^{2q}(X^*(q)-1-2e^{-q})=$$
$$=e^{2q}X^*(q)-e^{2q}-2e^q.$$

Внося эти выражения в исходное уравнение, приходим к операторному уравнению

$$(e^{2q}-e^q+1)X^*(q)=e^{2q}+e^q.$$

Таким образом,

$$X^*(q)=\frac{e^{2q}+e^q}{e^{2q}-e^q+1}.$$

Так как $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $X^*(q)$ запишем в следующем виде:

$$X^*(q)=\frac{e^q\left(e^q-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}e^q}{e^{2q}-2e^q\cdot\frac{1}{2}+1}=\frac{e^q\left(e^q-\cos\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}e^q\sin\frac{\pi}{3}}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{3}+1}.$$

Отсюда по формулам 10 и 11 таблицы изображений п. 1 находим

$$x_n=\cos\frac{n\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}=2\sin\frac{2n+1}{6}\pi. ▶$$

Замечание. Записать ответ в форме $x_n=2\cos\frac{n-1}{3}\pi$ нельзя, так как в этом случае получим $x_0=0\neq 1$ (по условию равенства нулю решетчатой функции от отрицательного аргумента).

Пример 8. Решить уравнение $x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=3^n$ при произвольных начальных условиях x_0, x_1.

◀ Полагая $x_n\risingdotseq X^*(q)$ и используя приведенные при решении примера 1 изображения

$$x_{n+1}\risingdotseq e^qX^*(q)-x_0e^q,\quad x_{n+2}\risingdotseq e^{2q}X^*(q)-x_0e^{2q}-x_1e^q,$$

приходим к операторному уравнению

$$(e^{2q}-4e^q+4)X^*(q)-x_0e^{2q}-(x_1-4x_0)e^q=\frac{e^q}{e^q-3}$$

$\left(\text{поскольку по формуле 3 таблицы п. 1 } 3^n\risingdotseq\frac{e^q}{e^q-3}\right)$. Отсюда находим

$$X^*(q)=\frac{x_0e^{2q}}{(e^q-2)^2}+(x_1-4x_0)\frac{e^q}{(e^q-2)^2}+\frac{e^q}{(e^q-3)(e^q-2)^2}.$$

Разлагая дробь $\frac{1}{(e^q-3)(e^q-2)^2}$ на простейшие, имеем

$$X^*(q)=x_0\frac{e^{2q}}{(e^q-2)^2}+(x_1-4x_0-1)\frac{e^q}{(e^q-2)^2}-\frac{e^q}{e^q-2}+\frac{e^q}{e^q-3}.$$

Но

$$\frac{e^q}{e^q-3} \risingdotseq 3^n, \quad \frac{e^q}{e^q-2} \risingdotseq 2^n,$$

$$\frac{2e^q}{(e^q-2)^2} \risingdotseq n\cdot 2^n, \quad \frac{2e^{2q}}{(e^q-2)^2} \risingdotseq (n+1)\, 2^{n+1}$$

(последнее соотношение следует из предыдущего по формуле опережения). Переходя от $X^*(q)$ к оригиналу, находим:

$$x_n = x_0 \frac{n+1}{2} 2^{n+1} + \frac{x_1-4x_0-1}{2} n\cdot 2^n - 2^n + 3^n =$$

$$= \frac{x_1-2x_0-1}{2} n\cdot 2^n + (x_0-1)\, 2^n + 3^n = (C_1 + C_2 n)\, 2^n + 3^n. \blacktriangleright$$

Пример 9. Решить систему разностных уравнений

$$x_{n+2} - y_n = 0,$$
$$y_{n+2} + x_n = 0$$

при начальных условиях $x_0 = y_0 = 1$, $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = 0$.

◀ Полагаем $x_n \risingdotseq X^*(q)$, $y_n \risingdotseq Y^*(q)$ и по формуле опережения имеем:

$$x_{n+2} \risingdotseq e^{2q}(X^*(q) - x_0 - x_1 e^{-q}) = e^{2q} X^*(q) - e^{2q} - \sqrt{2} e^q,$$
$$y_{n+2} \risingdotseq e^{2q}(Y^*(q) - y_0 - y_1 e^{-q}) = e^{2q} Y^*(q) - e^{2q}.$$

Получаем систему операторных уравнений

$$e^{2q} X^*(q) - Y^*(q) = e^{2q} + \sqrt{2} e^q,$$
$$e^{2q} Y^*(q) + X^*(q) = e^{2q}.$$

Так как $e^{4q}+1 = (e^{2q} + \sqrt{2} e^q + 1)(e^{2q} - \sqrt{2} e^q + 1)$, то решение этой системы запишется в виде

$$X^*(q) = \frac{e^{4q} + \sqrt{2} e^{3q} + e^{2q}}{e^{4q}+1} = \frac{e^{2q}}{e^{2q} - \sqrt{2} e^q + 1},$$

$$Y^*(q) = \frac{e^{4q} - e^{2q} - \sqrt{2} e^q}{e^{4q}+1} = \frac{e^{2q} - \sqrt{2} e^q}{e^{2q} - \sqrt{2} e^q + 1}.$$

Применяя формулу опережения, имеем:

$$\frac{e^{2q}}{e^{2q} - \sqrt{2} e^q + 1} = \sqrt{2} \frac{e^q \cdot e^q \sin\frac{\pi}{4}}{e^{2q} - 2e^q \cos\frac{\pi}{4} + 1} \risingdotseq \sqrt{2} \sin (n+1) \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{e^{2q} - \sqrt{2} e^q}{e^{2q} - \sqrt{2} e^q + 1} = \frac{e^q\left(e^q - \cos\frac{\pi}{4}\right) - e^q \sin\frac{\pi}{4}}{e^{2q} - 2e^q \cos\frac{\pi}{4} + 1} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4} = \sqrt{2} \cos\frac{(n+1)\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$x_n = \sqrt{2} \sin\frac{(n+1)\pi}{4}, \quad y_n = \sqrt{2} \cos\frac{(n+1)\pi}{4}. \blacktriangleright$$

Решить следующие линейные разностные уравнения:

13.189. $x_{n+2} - 3x_{n+1} - 10x_n = 0$; $x_0 = 3$, $x_1 = -1$.

13.190. $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$; $x_0 = 1$, $x_1 = -1$.

13.191. $x_{n+2} - \sqrt{3}\, x_{n+1} + x_n = 0$; $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

13.192. $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$; начальные условия произвольные.

13.193. $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 2^n$; $x_0 = x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

13.194. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2\cdot 4^n$; начальные условия произвольные.

Решить системы линейных разностных уравнений:

13.195.

$$x_{n+1} - x_n + y_n = 3^n,$$
$$y_{n+1} + 2x_n = -3^n; \quad x_0 = 3, \; y_0 = 0.$$

13.196.

$$5x_{n+1} - 12x_n - y_n = 0,$$
$$5y_{n+1} - 6x_n - 13y_n = 0;$$

начальные условия произвольные.