Глава 12

РЯДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 1. Числовые ряды

1. Сходимость ряда. Критерий Коши. Выражение

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \qquad (1)$$

где $(u_k)_{k\in N}$ — заданная числовая действительная или комплексная последовательность, называется *числовым рядом*. Конечные суммы

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ \ldots,\ S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n,\ \ldots \qquad (2)$$

называются *частичными суммами* ряда (1).

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм (2) $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, то ряд (1) называется *сходящимся*, а число S — *суммой ряда* (1).

Критерий Коши. *Для того чтобы числовой ряд (1) был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N$ и $p=1, 2, \ldots$ выполнялось неравенство*

$$|S_{n+p}-S_n|=|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

Необходимый признак сходимости. *Если ряд (1) сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

Пример 1. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится и найти его сумму.

◀ Так как дробь $\frac{1}{x(x+1)}$ представима в виде

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1},$$

то частичную сумму ряда можно записать следующим образом:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

т. е. заданный ряд сходится и его сумма равна 1. ▶

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ и в случае сходимости найти его сумму.

◀ Имеем

$$S_n=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}.$$

Если $q=1$, то $S_n=n$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, и, следовательно, ряд расходится. Пусть теперь $q\neq 1$, тогда

$$S_n=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}.$$

Положим $q=re^{i\varphi}$, тогда $q^n=r^ne^{in\varphi}$. При $0<r<1$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\lim_{n\to\infty}r^ne^{in\varphi}=0,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}=0$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-q}$. Если же $r>1$, то $r^n\to\infty$ и, следовательно, конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}$, а значит, и предела последовательности частичных сумм не существует. Наконец, при $r=1$ и $\varphi\not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ предел

$$\lim_{n\to\infty}e^{in\varphi}=\lim_{n\to\infty}(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

(а потому и предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$) также не существует.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$, члены которого составляют бесконечную геометрическую прогрессию с первым членом 1 и знаменателем q, сходится при $|q|<1$ и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$ и расходится при $|q|\geq 1$. ▶

Пример 3. Доказать, что гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

расходится, хотя его члены стремятся к нулю при $n\to\infty$.

◀ Рассмотрим разность частичных сумм с номерами $2n$ и n. Имеем

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Заменяя каждое слагаемое меньшей величиной $1/2n$, получаем

$$S_{2n}-S_n>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Это неравенство означает, что при $p=n$ для гармонического ряда не выполняется критерий Коши и, следовательно, ряд расходится. ►

Показать, что следующие ряды сходятся, и найти их суммы:

12.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. **12.2.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{4n^2-9}$.

12.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. **12.4.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n^2-1)}$.

12.5*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{3^n}$. **12.6.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n}$.

Используя критерий Коши или необходимый признак сходимости ряда, установить расходимость следующих рядов:

12.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. **12.8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$.

12.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. **12.10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^{10}}$.

12.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n}{n2^n}$. **12.12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n}+in}$.

12.13. Доказать, что если члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, то его сходимость не нарушится.

12.14. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ сходятся и их суммы соответственно u и v, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$, причем его сумма равна $u+v$. Привести пример, когда обратное утверждение не имеет места.

12.15. Доказать, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость этого ряда (но влияет на сумму!).

2. Абсолютная и условная сходимость. Признаки абсолютной сходимости. Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из модулей членов этого ряда, т. е. сходится ряд

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|. \tag{3}$$

Если ряд (1) сходится, а ряд (3) расходится, то ряд (1) называется *условно сходящимся*.

Признак сравнения рядов. *Если члены ряда* (1) *для всех* $n>N_0$ $(N_0\geqslant 1)$ *удовлетворяют условию* $|u_n|\leqslant b_n$, *причем ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *сходится, то ряд* (1) *сходится абсолютно. Если же для* $n>N_1$ *члены ряда* (1) *удовлетворяют условию* $0<c_n\leqslant|u_n|$, *причем ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ *расходится, то ряд* (3) *расходится, т. е. ряд* (1) *не сходится абсолютно.*

Пример 4. Зная, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится (см. пример 1), установить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

◄ Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2},$$

то, учитывая неравенства

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)},\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

по признаку сравнения убеждаемся в сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. ►

На практике более эффективным оказывается следующий

Предельный признак сравнения. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ *сходится абсолютно и существует конечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{v_n}\right|=q<+\infty$, *то ряд* (1) *также сходится абсолютно. Если же члены рядов* u_n *и* v_n *— действительные положительные числа и*

$$0<\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}<+\infty,$$

то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ *либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3-2}{n^4+5n}. \tag{4}$$

◀ Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 4) и так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n} : \frac{1}{n^2} = 3 \neq 0,$$

то ряд (4) также сходится. ▶

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n}. \qquad (5)$$

◀ Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n} : \frac{1}{n} = \frac{2}{3},$$

а гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (см. пример 3), то и ряд (5) расходится. ▶

Признак Даламбера. *Если члены ряда (1) таковы, что существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l,$$

то при $0 \leqslant l < 1$ ряд (1) сходится абсолютно, при $l > 1$ — расходится, а при $l = 1$ требуется дополнительное исследование.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}. \qquad (6)$$

◀ Имеем $u_n = \frac{n^3}{2^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 2^n}{2^{n+1} n^3} = \frac{1}{2} < 1.$$

Таким образом, ряд (6) сходится. ▶

Признак Коши. *Пусть $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n|} = l$. Тогда, если $0 \leqslant l < 1$, то ряд (1) сходится абсолютно, если $l > 1$ — ряд (1) расходится, а при $l = 1$ требуется дополнительное исследование.*

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1} \right)^{2n-1}.$$

◀ Имеем $u_n = \left(\frac{2n+5}{3n-1} \right)^{2n-1}$, поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1} \right)^{2-\frac{1}{n}} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится. ▶

При использовании признака Коши бывает полезна следующая *формула Стирлинга*:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}.$$

◀ Имеем:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n \sqrt{2\pi n}}{n^n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \right)^{1/n} =$$

$$= \frac{2}{e} \lim_{n\to\infty} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}} = \frac{2}{e} < 1,$$

т. е. ряд сходится. ▶

Интегральный признак Коши. *Пусть функция $f(x)$ положительна и монотонна при $x \geqslant 1$, и пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $f(n) = |u_n|$. Тогда числовой ряд (3) сходится (т. е. ряд (1) сходится абсолютно) или расходится одновременно с несобственным интегралом*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad a \geqslant 1.$$

Пример 10. Выяснить, при каких значениях параметра p сходится *ряд Дирихле* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

◀ Так как функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши, то исследование сходимости ряда Дирихле сводится к исследованию сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$. Но

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{b\to+\infty} \ln b = +\infty & \text{при } p = 1, \\ \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = +\infty & \text{при } 0 < p < 1, \\ \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)b^{p-1}} \right) = \frac{1}{p-1} & \text{при } p > 1. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что ряд Дирихле сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. ▶

12.16. Доказать, что всякий абсолютно сходящийся ряд является рядом сходящимся.

12.17. Доказать, что члены сходящегося ряда можно группировать, не меняя их порядка, произвольным образом.

12.18. Доказать, что члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять произвольным образом; при этом сумма ряда не изменится.

Используя признак сравнения или предельный признак сравнения, исследовать на сходимость следующие ряды:

12.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$. **12.20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

12.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^2-1}$. **12.22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

12.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$. **12.24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{4n^3+5n}$.

12.25. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}n^2\operatorname{tg}^4\frac{\pi}{n}$. **12.26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}$.

12.27. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}$. **12.28.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$.

12.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)3^n}$. **12.30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\sqrt{n}+i\sin\sqrt{n}}{n^2}$.

Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость следующие ряды:

12.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{2^n}$. **12.32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

12.33. $\frac{3}{1}+\frac{3\cdot5}{1\cdot4}+\ldots+\frac{3\cdot5\,\ldots\,(2n+1)}{1\cdot4\,\ldots\,(3n-2)}+\ldots$

12.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}$. **12.35.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{8^n n^2}$.

12.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n+1}}{n!}$. **12.37.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\,\ldots\,(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$.

12.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{3^n}$. **12.39.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\,(e-i)^n}$.

Используя признак Коши, исследовать на сходимость следующие ряды:

12.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$. **12.41.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

12.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. **12.43.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

12.44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$. **12.45.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$.

12.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, где $u_{2k-1}=\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$, $u_{2k}=\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{k/2}$.

12.47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2i}{(1+i)n+3}\right)^n$. **12.48.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i(2n+i)}{4n}\right)^n$.

Используя интегральный признак Коши, исследовать на сходимость следующие ряды:

12.49. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. **12.50.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

12.51. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. **12.52.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$.

Исследовать на сходимость ряды:

12.53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$. **12.54.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

12.55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$. **12.56.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

12.57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. **12.58.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$.

12.59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n-1)^{n-1}}$. **12.60.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

12.61. $100+\frac{100\cdot103}{1\cdot5}+\frac{100\cdot103\cdot106}{1\cdot5\cdot9}+\ldots$

$$\ldots+\frac{100\cdot103\,\ldots\,(97+3n)}{1\cdot5\cdot9\,\ldots\,(4n-3)}+\ldots$$

12.62. $1+\frac{1\cdot11}{3!}+\frac{1\cdot11\cdot21}{5!}+\ldots+\frac{1\cdot11\cdot21\,\ldots\,(10n-9)}{(2n-1)!}+\ldots$

12.63. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\ldots+\frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{(4n-2)!!}+\ldots$

12.64. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}}$. **12.65.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

12.66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{n^{2/5}}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^{2/5}}\right)\right)$.

12.67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. **12.68.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n^2}$.

12.69. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. **12.70.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

12.71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$. **12.72*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$.

12.73. $2+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}+\ldots$

12.74. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}$. **12.75.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

12.76. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+3}\right)^n$. **12.77.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n$.

12.78. $\frac{1}{100}+\frac{1\cdot 4}{100\cdot 102}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{100\cdot 102\cdot 104}+\ldots$

$$\ldots+\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{100\cdot 102\ldots(98+2n)}+\ldots$$

12.79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$. **12.80.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n}-\sqrt[3]{n})}$.

12.81. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$. **12.82.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(3n+1)(2\sqrt{n}-1)}$.

12.83. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+i}}$. **12.84.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n n}{2^n}$.

12.85. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n\cdot n}{2^n}$. **12.86.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$.

12.87. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^\alpha}$ при различных действительных значениях p и α.

12.88. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^\alpha(\ln\ln n)^\beta}$ при различных действительных значениях p, α и β.

12.89. Убедиться в том, что признак Даламбера неприменим к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, где $u_{2k-1}=\frac{2^{k-1}}{3^k}$, $u_{2k}=\frac{2^k}{3^k}$, тогда как признак Коши показывает, что этот ряд сходится.

3. Признаки условной сходимости. Признак Лейбница. *Пусть члены a_n знакочередующегося ряда*

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots \qquad (7)$$

действительны, монотонно убывают, т. е.

$$a_1>a_2>\ldots>a_n>\ldots, \qquad (8)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0. \qquad (9)$$

Тогда ряд (7) сходится, причем для его суммы S имеет место оценка $S<a_1$.

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

◀ Так как $a_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=a_{n+1}$, $n=1, 2, \ldots,$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то выполнены условия (8) и (9), и данный ряд сходится. Ряд из абсолютных величин членов, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится условно. ▶

Признак Абеля—Дирихле. *Пусть члены последовательности (b_n) монотонно убывают: $b_1>b_2>\ldots>b_n>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, а частичные суммы $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $n=1, 2, \ldots,$ ограничены в совокупности, т. е.*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leqslant M \text{ для всех } n\in\mathbb{N}.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ сходится.

Пример 12. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k},\quad x\in\mathbb{R}.$$

◀ Очевидно, что в точках $x=m\pi$ все члены ряда равны нулю, т. е. при $x=m\pi$ ряд сходится и его сумма равна нулю. Пусть теперь $x\not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Подсчитаем сумму

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin kx=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Отсюда заключаем, что для любых $n=1,\ 2,\ \dots$ и $x\not\equiv 0 \pmod{\pi}$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{2}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Далее, последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно убывает и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Таким образом, при $x\not\equiv 0 \pmod{\pi}$ выполнены условия признака Абеля—Дирихле, и потому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ сходится. Следовательно, ряд сходится при любом x. ▶

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

12.90. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}$. **12.91.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

12.92. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5n-2}$. **12.93.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$.

12.94. $\frac{1}{3}-\frac{1\cdot4}{3\cdot5}+\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot5\cdot7}-\dots$
$$\dots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot4\cdot7\dots(3n-2)}{3\cdot5\cdot7\dots(2n+1)}+\dots$$

12.95. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$. **12.96.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$.

12.97. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$. **12.98.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

12.99. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$. **12.100.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$.

12.101. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$. **12.102.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n^2}}{n!}$.

12.103. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$.

12.104. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(\ln 3)^n}$. **12.105*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{n}$.

12.106. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$. **12.107.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3-i}{2}\right)^n$.

12.108. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+i}{3}\right)^n$. **12.109.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in\pi}{2^n}$.

Убедиться в том, что к рядам $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ с указанными ниже членами ($k\in\mathbb{N}$) нельзя применить признак Лейбница. Исследовать эти ряды на сходимость другими способами.

12.110*. $u_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}$, $u_{2k}=-\frac{1}{\sqrt{k+1}-1}$.

12.111. $u_{2k-1}=\frac{1}{3k+2}$, $u_{2k}=-\frac{1}{3k-1}$.

12.112. $u_{2k-1}=\frac{1}{3^k}$, $u_{2k}=-\frac{1}{2^k}$.

12.113. $u_{2k-1}=\frac{1}{2k-1}$, $u_{2k}=-\frac{1}{k^2}$.

12.114*. Доказать, что из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|^2$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$.

Произведением по Коши рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$, члены которого получены по формулам

$$c_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Исследовать на сходимость произведение по Коши следующих рядов:

12.115.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

12.116*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

12.117*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

12.118*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

12.119. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то произведение по Коши сходится.

Пусть $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — произвольная числовая последовательность, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ — частичные суммы сходящегося ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$, а $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ — остаток этого ряда. Проверить справедливость соотношений (называемых *преобразованиями Абеля*):

12.120. $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) S_k - v_1 S_0 + v_n S_n$.

12.121. $\sum\limits_{k=m+1}^{n} u_k v_k = \sum\limits_{k=m+1}^{n-1} (v_k - v_{k+1})(S_k - S_m) + v_n (S_n - S_m)$.

12.122. $\sum\limits_{k=m+1}^{n} u_k v_k = \sum\limits_{k=m+2}^{n} (v_k - v_{k-1}) R_{k-1} + v_{m+1} R_m - v_n R_n$.

12.123. Доказать, что для остатка R_n знакочередующегося ряда (7), удовлетворяющего условиям признака Лейбница, справедливо неравенство $|R_n| < a_{n+1}$.

§ 2. Функциональные ряды

1. Область сходимости функционального ряда. Пусть функции $f_n(z)$, $n\in\mathbb{N}$, определены в области D. Выражение

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

называется *функциональным рядом*. Если для $z_0 \in D$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ сходится, то говорим, что функциональный ряд (1) *сходится в точке* z_0. Если в каждой точке $z \in D_1 \subset D$ числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходятся, то ряд (1) называется *сходящимся в области* D_1.

Критерий Коши. *Для того чтобы функциональный ряд (1) был сходящимся в области D_1, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и любого $z \in D_1$ существовало $N = N(\varepsilon, z)$ такое, что*

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

для всех $n > N(\varepsilon, z)$ и $p \in \mathbb{N}$.

Для определения области абсолютной сходимости функционального ряда (1) следует воспользоваться либо признаком Даламбера, либо признаком Коши. Именно, если

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = l(z)$$

или

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = l(z),$$

то для определения области абсолютной сходимости ряда (1) следует решить функциональное неравенство $l(z) < 1$, а для определения области расходимости — функциональное неравенство $l(z) > 1$. При этом для изучения поведения ряда в граничных точках получаемой области, т. е. в точках, описываемых уравнением $l(z) = 1$, требуется дополнительное исследование.

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 3^n \sqrt{(x+2)^n}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x > -2.$$

◀ Так как $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n 3^n \sqrt{(x+2)^n}}$ и $x > -2$, то, применяя признак Коши, имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n 3^n \sqrt{(x+2)^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 (x+2)^{1/2} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3\sqrt{x+2}}.$$

Следовательно, ряд сходится, если $\dfrac{1}{3\sqrt{x+2}} < 1$, т. е. при $x > -\dfrac{17}{9}$.

При $x = -\frac{17}{9}$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, который сходится по признаку Лейбница. Таким образом, область сходимости ряда — полуинтервал $[-17/9, +\infty)$. ▶

Найти области сходимости рядов ($x \in \mathbb{R}$). Исследовать ряды на абсолютную сходимость.

12.124. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$. **12.125.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$. **12.126.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$.

12.127. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(x+3)^n}$. **12.128.** $\sum_{n=1}^{\infty} n^x$.

12.129. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{n2^n x^n}\right)$. **12.130.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{nx}}$.

12.131. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$. **12.132.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$. **12.133.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$.

Пример 2. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-i)^n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

◀ Применяя признак Даламбера, можем записать неравенство

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(z-i)^n}{(z-i)^{n+1} n} \right| = \frac{1}{|z-i|} < 1,$$

откуда заключаем, что ряд сходится абсолютно вне круга радиуса 1 с центром в точке i, т. е. при $|z-i| > 1$. На окружности $|z-i| = 1$ ряд, очевидно, расходится. ▶

Найти области абсолютной сходимости указанных ниже рядов ($z \in \mathbb{C}$):

12.134. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n}$. **12.135.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+1)^n}$.

12.136. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2^n}{(z-3i)^{2n}}$. **12.137.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-nz}$.

12.138. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nz^2}$. **12.139.** $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{nz}$.

12.140*. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-z}$. **12.141*.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n$.

12.142*. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-2}{1-2z}\right)^n$. **12.143*.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}$.

2. Равномерная сходимость. Сходящийся в области D_1 функциональный ряд (1) называется *равномерно сходящимся* в этой области, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что для остатка ряда (1)

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$$

при всех $n > N(\varepsilon)$ и $z \in D_1$ имеет место оценка

$$|R_n(z)| < \varepsilon.$$

Критерий Коши равномерной сходимости. *Для того чтобы функциональный ряд (1) был равномерно сходящимся в области D_1, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и $z \in D_1$ выполнялись неравенства*

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z^n - z^{n+1}),$$

сумму ряда и показать, что во всей области сходимости ряд сходится неравномерно.

◀ Так как частичные суммы ряда имеют вид

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (z^k - z^{k+1}) = 1 - z^{n+1},$$

то можем заключить, что $\lim_{n\to\infty} S_n(z)$ существует только при $|z| < 1$ и в точке $z = 1$, т. е. областью сходимости ряда является область

$$D_1 = \{z \mid |z| < 1 \text{ и } z = 1\},$$

причем сумма ряда равна

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } |z| < 1, \\ 0 & \text{при } z = 1. \end{cases}$$

Остаток ряда $R_n(z) = S(z) - S_n(z)$ имеет вид

$$R_n(z) = \begin{cases} z^{n+1} & \text{при } |z| < 1, \\ 0 & \text{при } z = 1. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $N(\varepsilon_0)$ такие, что для любого $n > N(\varepsilon_0)$ найдется z_n такое, что $|z_n| < 1$, но $|R_n(z_n)| > \varepsilon_0$. Так, например, выбирая $\varepsilon_0 = 1/4$ и $z_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{n+1}}} e^{i\varphi_n}$, φ_n — произвольно, имеем $|R_n(z_n)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$. Это означает, что во всей области сходимости D_1 равномерной сходимости нет. Заметим, однако, что в любой области $D_r=\{z \mid |z|\leqslant r<1\}$ ряд будет сходиться равномерно, так как для любого $\varepsilon>0$ найдется $N=N(\varepsilon)=\frac{\ln\varepsilon}{\ln r}$ такое, что для всех $z\in D_r$ и $n>N(\varepsilon)$ имеем $|R_n(z)|=|z|^{n+1}\leqslant r^{n+1}<\varepsilon$. ▶

Признак Вейерштрасса. *Пусть функциональный ряд* (1) *сходится в области* D_1, *и пусть существует сходящийся знакоположительный числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *такой, что для всех* $z\in D_1$ *и для* $n>N_0$ *члены ряда* (1) *удовлетворяют условию*

$$|f_n(z)|\leqslant a_n.$$

Тогда ряд (1) *сходится абсолютно и равномерно в области* D_1.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *мажорирующим* для ряда (1).

Пример 4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ и показать, что в этой области ряд сходится равномерно.

◀ Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}n^2}{(n+1)^2 z^n}\right|=|z|.$$

Следовательно, в круге $|z|<1$ ряд сходится. На границе круга, т. е. при $|z|=1$, получаем сходящийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

Значит, исходный ряд сходится в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$. Но так как для всех $|z|\leqslant 1$

$$|f_n(z)|=\frac{|z|^n}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2},$$

то ряд сходится абсолютно и равномерно. ▶

Найти область сходимости и область **равномерной** сходимости указанных рядов ($x\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}$):

12.144. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x}$. **12.145.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}$.

12.146. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$. **12.147.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$.

12.148. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nz}}{n^2}$. **12.149.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{n^2}$.

12.150. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-z}$. **12.151.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(z+2)^n}$.

12.152*. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x\in\mathbb{R}$, сходится абсолютно во всех точках, но не равномерно в любом промежутке, внутри или на границе которого находится точка $x=0$.

12.153. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x\in\mathbb{R}$, сходится абсолютно и равномерно на всей числовой оси, тогда как ряд из абсолютных величин членов данного ряда (ряд задачи 12.152) на всей числовой оси сходится неравномерно.

12.154. Используя принцип максимума модуля аналитической функции, доказать, что если члены ряда (1) являются аналитическими в области D функциями и непрерывными в замкнутой области $\overline{D}=D+\Gamma$ и если ряд (1) сходится равномерно на Γ, то он сходится равномерно в замкнутой области $\overline{D}$ (вторая теорема Вейерштрасса).

12.155. Найти область сходимости и область равномерной сходимости, а также сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+z^n}-\frac{1}{1+z^{n+1}}\right).$$

3. Свойства равномерно сходящихся рядов. Сформулируем ряд свойств в виде задач.

12.156. Доказать, что если члены равномерно сходящегося в области D_1 функционального ряда (1) умножить на одну и ту же ограниченную в области D_1 функцию $\varphi(z)$, то равномерная сходимость ряда не нарушится.

12.157. Доказать, что если функции $f_n(z)$ непрерывны в области D_1 и ряд (1) равномерно сходится в этой области, то его сумма $f(z)$ непрерывна в области D_1.

12.158. Доказать, что если функции $f_n(z)$ непрерывны в области D_1 и ряд (1) равномерно сходится в этой области, то его можно почленно интегрировать по любой кривой l, целиком лежащей в области D_1, т. е. имеет место равенство

$$\int\limits_l\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(\eta)\right)d\eta=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_l f_n(\eta)\,d\eta.$$

12.159*. Доказать, что если на отрезке $[a, b]$ функции $f_n(x)$ дифференцируемы, функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится, а ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ равномерно сходится, то исходный ряд можно почленно дифференцировать, т. е. имеет место равенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Для равномерно сходящихся рядов из аналитических функций имеет место

Теорема Вейерштрасса. *Если члены функционального ряда (1), т. е. функции $f_n(z)$, являются аналитическими в области D функциями и в любой замкнутой подобласти $\overline{D}_1 \subset D$ ряд (1) сходится равномерно, то:*

а) сумма ряда (1), т. е. функция $f(z)$, является аналитической в области D;

б) ряд (1) можно почленно дифференцировать любое число раз, т. е. справедливы равенства

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad z \in D_1 \tag{2}$$

в) в любой замкнутой подобласти $\overline{D}_1 \subset D$ полученные в результате дифференцирования ряды (2) сходятся равномерно.

12.160. Используя утверждение задач 12.157, 12.158 и теорему Морера (теорема, обратная теореме Коши), доказать утверждение а) теоремы Вейерштрасса.

12.161. Воспользовавшись формулой Коши для производной и утверждением задачи 12.158, доказать утверждение б) теоремы Вейерштрасса.

§ 3. Степенные ряды

1. Область сходимости и свойства степенных рядов. Ряд

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{1}$$

называется *степенным* по степеням $(z - z_0)$. В частности, ряд

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{2}$$

является степенным по степеням z. С помощью замены $z - z_0 = Z$ ряд (1) сводится к ряду (2).

Теорема Абеля. *Если степенной ряд (2) сходится в точке $z = z_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится для всех z таких, что $|z| < |z_1|$, причем сходимость будет равномерной в любом замкнутом круге $|z| \leq r < |z_1|$. Если же ряд (2) расходится в точке $z = z_2$, то он расходится и для всех z таких, что $|z| > |z_2|$.*

Из теоремы Абеля следует, что областью сходимости степенного ряда является круг с центром в начале координат (с центром в точке z_0), радиус которого может быть определен применением либо признака Даламбера, либо признака Коши, т. е. из условий

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = |z| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1$$

или

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < 1.$$

Отсюда для вычисления радиуса R круга сходимости получаем соотношения

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|} \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{(z+2)^2}{1\cdot 3} + \frac{(z+2)^4}{4\cdot 3^2} + \ldots + \frac{(z+2)^{2n}}{n^2 3^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n}.$$

◀ Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n}, \quad u_{n+1} = \frac{(z+2)^{2(n+1)}}{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(z+2)^{2(n+1)} n^2\cdot 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1} (z+2)^{2n}}\right| = \frac{|z+2|^2}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{|z+2|^2}{3}.$$

Отсюда заключаем, что ряд сходится в круге $|z+2| < \sqrt{3}$. Далее, на границе круга, т. е. при $|z+2| = \sqrt{3}$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

а это означает, что ряд абсолютно сходится в замкнутом круге $|z+2| \leq \sqrt{3}$, причем сходимость в этом замкнутом круге равномерная. ▶

12.162. Сформулировать теорему Абеля для ряда (1).

12.163*. Установить, что степенной ряд (1) обладает следующими свойствами:

а) в круге сходимости $|z - z_0| < R$ сумма степенного ряда $f(z)$ является функцией аналитической;

б) в круге сходимости $|z - z_0| < R$ степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, причем продифференцированные ряды имеют тот же самый круг сходимости $|z - z_0| < R$;

в) ряд (1) можно почленно интегрировать по любой кривой, лежащей в круге сходимости, причем интеграл зависит только от начала и конца кривой интегрирования, а ряд, полученный из ряда (1) в результате интегрирования от z_0 до z, имеет тот же круг сходимости $|z-z_0|<R$.

12.164*. Пусть степенной ряд (1) сходится в круге $|z-z_0|<R$, $R>0$, и $f(z)$ — сумма этого ряда. Показать, что значения производных $f^{(n)}(z)$ в точке z_0 можно выразить через коэффициенты ряда (1) по формулам $f^{(n)}(z_0)=n!c_n$, $n=0, 1, \ldots$

Найти области абсолютной сходимости и области равномерной сходимости следующих рядов ($z\in\mathbb{C}$). Заменяя в этих рядах (кроме 12.179, 12.181, 12.187—12.189) z на $x\in\mathbb{R}$, исследовать их на абсолютную и равномерную сходимость.

12.165. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$. **12.166.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n\cdot 2^n\sqrt{2n+1}}$.

12.167. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+2)^{2n}}{n}$.

12.168. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n+1}(z-4)^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

12.169. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(z-2)^{2n}}{n}$. **12.170.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-3)^{2n}}{(2n+1)3^n}$.

12.171. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$. **12.172.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}z^n$.

12.173. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(z+1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$. **12.174.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2z^n}{(2n)!}$.

12.175. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nz^n$. **12.176.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nz^n}{3n-2}$.

12.177. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)z^n}{n!}$. **12.178.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n-1}2^n(z-1)^n$.

12.179. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(z-i)^n$. **12.180.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-3)^{2n+1}}{3^n(2n+1)}$.

12.181. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n^n}$. **12.182.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n+1)(z-1)^n$.

12.183. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-3)^n}{(2n+1)4^n}$. **12.184.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2z^n}{n!}$.

12.185. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n2^n\cdot\ln n}$. **12.186.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{z^{3n-1}}{8^{n+1}n\ln^2 n}$.

12.187. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^{3n}}{(n+1)2^n}$. **12.188.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5(z+i)^{2n+1}}{n!}$.

12.189. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$. **12.190.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^nn!z^{2n}}{(2n)!}$.

12.191. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{2n+1}(z-1)^n$. **12.192.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$.

12.193. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n(z-3)^{3n-1}}{n(n+1)}$. **12.194.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+3)^n}{n\sqrt{n}}$.

12.195. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(z-3)^{2n}}{n2^n\ln^2 n}$. **12.196.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2n-1}(z+3)^n$.

12.197. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!z^{n!}$. **12.198.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(z-5)^n}{(3n+1)^{2n}}$.

12.199. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n^2}}{n!2^n}$. **12.200.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n^2}z^{n^2}$.

12.201. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2)^{n^2}}{n^n}$. **12.202.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^{3n}}{n^2}$.

2. Разложение функций в ряд Тейлора. Имеет место следующая Теорема Тейлора. *Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-z_0|<R$, однозначно представима в этом круге своим рядом Тейлора*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

коэффициенты которого определяются по формулам[1]

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{|\eta-z_0|=r\\ r<R}}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}\,d\eta,\quad n=0, 1, \ldots$$

[1]) Здесь и далее для записи криволинейных интегралов по замкнутому контуру (контурных интегралов) мы используем обычный знак интеграла.

Следствие. Если функция $f(z)$ аналитична в области D и $z_0\in D$, то в круге $|z-z_0|<R(z_0, D)$, где $R(z_0, D)$ — наименьшее расстояние от точки z_0 до границы области D или до ближайшей точки z', в которой $f(z)$ не аналитична, $f(z)$ может быть представлена в виде степенного ряда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z-z_0)^n, \qquad (3)$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n(z_0)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{|\eta-z_0|=r\\ r<R(z_0,\, D)}} \frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}\,d\eta,\quad n=0,\ 1,\ \ldots$$

Если $z_0=0$, то ряд Тейлора называют также *рядом Маклорена*.

Пример 2. Разложить функцию $f(z)=\operatorname{sh} z$ в ряд по степеням z (т. е. в ряд Маклорена).

◀ Так как $\operatorname{sh} z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$ является аналитической во всей плоскости, то по теореме Тейлора ее ряд Маклорена будет сходиться к ней во всей плоскости. Имеем

$$(\operatorname{sh} z)^{(2n+1)}=\operatorname{ch} z,\qquad n=0,\ 1,\ \ldots,$$

а

$$(\operatorname{sh} z)^{(2n)}=\operatorname{sh} z,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Следовательно, $c_{2n}=\dfrac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}=0$, а $c_{2n+1}=\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}=\dfrac{1}{(2n+1)!}$, и искомое разложение имеет вид

$$\operatorname{sh} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad z\in\mathbb{C}. \ ▶$$

Замечание. Если рассматривать ряд Тейлора функции $f(x)$ действительной переменной, т. е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

то для справедливости равенства (3) (при $z=x$ и $z_0=x_0$) необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора $R_n(x)$ стремился к нулю при $n\longrightarrow\infty$. Остаточный член может быть записан, например, в форме Лагранжа

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),\quad \text{где } 0\leqslant\theta\leqslant 1,$$

или в форме Коши

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),$$

или в какой-либо другой форме.

Пример 3. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию e^x.

◀ Функция $f(x)=e^x$ бесконечно дифференцируема и $(e^x)^{(n)}=e^x$. Следовательно, $f^{(n)}(0)=1$. Формула Тейлора с остаточным членом в

форме Лагранжа имеет вид

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

На любом конечном отрезке $x\in[-a,\ a]$, $a>0$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\leqslant e^a\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

а потому для любого $x\in\mathbb{R}$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \ ▶$$

При решении многих задач рекомендуется пользоваться следующими разложениями элементарных функций:

а) $e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\ldots+\dfrac{z^n}{n!}+\ldots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad z\in\mathbb{C}.$

б) $\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad z\in\mathbb{C}.$

в) $\sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad z\in\mathbb{C}.$

г) $\ln(1+z)=z-\dfrac{z^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{z^n}{n}+\ldots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n},\quad |z|<1.$

д) $\operatorname{arctg} z=z-\dfrac{z^3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\quad |z|<1.$$

е) $(1+z)^\alpha=$

$$=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n,\qquad |z|<1,\quad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$$

(в случае, когда $\alpha=m\in\mathbb{N}$ функция $(1+z)^m$ раскладывается по биному Ньютона в многочлен, причем разложение имеет место во всей плоскости).

ж) при $\alpha=-1$ из е) получаем бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $-z$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots,\quad |z|<1.$$

Пример 4. Разложить в ряд по степеням $(z+3)$ функцию $\ln(2-5z)$.

◀ Рассмотрим сначала следующее преобразование данной логарифмической функции:

$$\ln(2-5z)=\ln(2-5(z+3)+15)=\ln 17\left(1-\frac{5}{17}(z+3)\right)=$$
$$=\ln 17+\ln\left(1-\frac{5(z+3)}{17}\right).$$

Воспользуемся разложением г) для $\ln(1+u)$, полагая $u=-\frac{5}{17}(z+3)$. Так как разложение г) имеет место при $|u|<1$, то наше разложение будет иметь место при $\frac{5}{17}|z+3|<1$. Таким образом,

$$\ln(2-5z)=\ln 17+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(-\frac{5}{17}(z+3)\right)^n\frac{1}{n}=$$
$$=\ln 17-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{17}\right)^n\frac{(z+3)^n}{n},\quad |z+3|<\frac{17}{5}.$$

Заметим, что на действительной оси в точке $x=2/5$ ряд расходится (гармонический ряд), а в точке $x=-32/5$ по признаку Лейбница сходится. Следовательно, $[-32/5,\ 2/5)$ — промежуток сходимости на действительной оси. ▶

Часто для разложения функций в ряд удобно пользоваться дифференцированием или интегрированием известных разложений, а при разложении рациональной дроби разложить ее на простейшие.

Пример 5. Получить разложение г) для функции $f(z)=\ln(1+z)$.

◀ Имеем

$$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{d\eta}{1+\eta},$$

где путь интегрирования не охватывает точку $z=-1$. Заметим, что функция $\frac{1}{1+\eta}$ при $|\eta|<1$ является суммой геометрической прогрессии со знаменателем $-\eta$, т. е.

$$\frac{1}{1+\eta}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\eta)^n,$$

причем, если $|\eta|\leq|z|<1$, то ряд сходится равномерно и его можно почленно интегрировать. Поэтому для z таких, что $|z|<1$, имеем:

$$\ln(1+z)=$$
$$=\int_0^z\frac{d\eta}{1+\eta}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(-\eta)^n\,d\eta=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}.$$ ▶

Пример 6. Разложить в ряд по степеням z функцию

$$f(z)=\frac{z^2-2z+19}{(z-3)^2(2z+5)}.$$

◀ Разложим $f(z)$ на элементарные дроби. Имеем

$$f(z)=\frac{1}{2z+5}+\frac{2}{(z-3)^2}.$$

По формуле суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2z+5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{2z}{5}}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2z}{5}\right)^n,\quad |z|<\frac{5}{2},$$

и

$$\frac{2}{z-3}=-\frac{2}{3}\,\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n,\quad |z|<3.$$

Замечая, что

$$\left(\frac{2}{z-3}\right)'=-\frac{2}{(z-3)^2},$$

и учитывая утверждение б) задачи 12.163, получим

$$\frac{2}{(z-3)^2}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{3^n}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{3^{n+1}},\quad |z|<3.$$

Складывая ряды для $\frac{1}{2z+5}$ и $\frac{2}{(z-3)^2}$, имеем

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}+\frac{2(n+1)}{3^{n+2}}\right)z^n,\quad |z|<\frac{5}{2}.$$ ▶

Пример 7. Разложить в ряд по степеням x ($x\in\mathbb{R}$) функцию

$$f(x)=\int_0^x\frac{\sin u}{u}\,du.$$

◀ Зная разложение функции $\sin u=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}$ (см. разложение в)), имеем

$$\frac{\sin u}{u}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^{2k}}{(2k+1)!},\quad u\in\mathbb{R},$$

а потому, используя свойство в) задачи 12.163, получаем

$$\int_0^x \frac{\sin u}{u}\,du = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x \frac{u^{2k}}{(2k+1)!}\,du =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!\,(2k+1)}.$$

Используя теорему Тейлора (формулу Тейлора с остаточным членом в какой-либо форме для функций действительной переменной), разложить в ряд по степеням z следующие функции, проверив тем самым справедливость соответствующих соотношений из а)—е):

12.203. e^z. **12.204.** $\cos z$. **12.205.** $\sin z$. **12.206.** $(1+z)^\alpha$.
12.207. 2^z. **12.208.** $\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$. **12.209.** $\cos^2 z$.

Написать первые три ненулевых члена разложения в ряд по степеням z следующих функций:

12.210*. $\operatorname{tg} z$. **12.211.** $\frac{1}{\cos z}$. **12.212.** $\operatorname{th} z$. **12.213.** $e^z \cos z$.

Используя разложения основных элементарных функций а)—ж), а также возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенных рядов, разложить функции в ряд по степеням z и указать области сходимости полученных рядов[1]):

12.214. e^{-z^2}. **12.215.** $\sin^2 z$. **12.216.** $\frac{z}{4+z^2}$. **12.217.** $\frac{z}{3+4z}$.
12.218. $\sqrt[3]{27-z}$. **12.219.** $\frac{1}{\sqrt{9+z^2}}$. **12.220*.** $\frac{3z+1}{(z-2)^2}$.
12.221. $\frac{3}{1+z-2z^2}$. **12.222.** $(1-z)\,e^{-2z}$. **12.223.** $\operatorname{ch} z$.
12.224. $\sin 2z + 2z\cos 2z$. **12.225.** $\sin 2z \cos 2z$.
12.226. $\ln(1+z-2z^2)$. **12.227.** $\ln(z^2+3z+2)$.
12.228. $\ln(z+\sqrt{1+z^2})$. **12.229.** $\operatorname{arctg} z$. **12.230.** $\arcsin z$.
12.231. $\int_0^z e^{-\eta^2/2}\,d\eta$. **12.232.** $\int_0^z \frac{\sin \eta^2}{\eta}\,d\eta$.
12.233*. $\frac{z\cos z - \sin z}{z^2}$. **12.234*.** $\frac{z\sin z - 1 + \cos z}{z^2}$.

Разложить функции в ряд по степеням $z-z_0$ и определить области сходимости полученных рядов:

12.235. z^3-2z^2-5z-2, $z_0=-4$. **12.236.** $\frac{1}{1-z}$, $z_0=2$.

[1]) См. также задачи 12.289—12.294.

12.237. $\frac{1}{1-z}$, $z_0=3i$. **12.238.** $\frac{1}{z^2-6z+5}$, $z_0=3$.
12.239. $\frac{1}{z^2+3z+2}$, $z_0=-4$. **12.240.** $\sqrt[3]{z}$, $z_0=1$.
12.241*. $\frac{1}{z^2}$, $z_0=2$. **12.242.** e^{z^2-4z+1}, $z_0=2$.
12.243. ze^{2z-z^2}, $z_0=1$. **12.244.** $\sin(z^2+4z)$, $z_0=-2$.
12.245*. $\ln(5z+3)$, $z_0=1$.
12.246. $\ln(z^2+6z+12)$, $z_0=-3$.

Найти области сходимости указанных рядов и их суммы:

12.247. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)\,z^n$. **12.248.** $\sum_{n=1}^{\infty} n\,(z+1)^n$.

12.249. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{n+1}$. **12.250.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{-2n-2} z^{2n}$, $a\neq 0$.

12.251. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\,z^{2n}$.

3. Теорема единственности. Аналитическое продолжение. Сформулируем теорему единственности:

Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D и на множестве различных точек $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, имеющем предельную точку $a\in D$, выполняются равенства $f(z_n)=g(z_n)$, $n\in\mathbb{N}$, то $f(z)=g(z)$ всюду на D.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D, а функция $g(z)$ аналитична в области D_1 такой, что пересечение $D\cap D_1=D_2$ содержит последовательность различных точек $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, имеющую по крайней мере одну предельную точку $a\in D_2$. Пусть, кроме того, $f(z)=g(z)$ для $z\in D_2$. Тогда функция

$$F(z)=\begin{cases} f(z) & \text{для } z\in D,\\ g(z) & \text{для } z\in D_1\setminus D_2\end{cases}$$

называется *аналитическим продолжением* функции $f(z)$ с области D на область $D_1\setminus D_2$.

Пример 8. Доказать, что если функция $f(z)$ непрерывна в области D, содержащей точку $z=0$, и если $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{(-1)^n}{n}$ для $n=n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots$, то $f(z)$ не аналитична в области D ($n_0\geq 1$ — целое).

◀ Так как $f(z)$ непрерывна в D, то на отрезке действительной оси она также непрерывна, а в соседних точках $x=\frac{1}{n}$ и $x=\frac{1}{n+1}$, $n>n_0$, она принимает значения разных знаков. Поэтому существуют точки $x_n\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$, в которых $f(x_n)=0$, причем $x_n\to 0$. Следовательно, в точках $x_n\in D$ функция $f(z)$ совпадает с аналитической функцией $g(z)=0$, а так как $f(z)\not\equiv 0$, то $f(z)$ не может быть аналитической функцией. ▶

П р и м е р 9. Доказать, что функция

$$g(z)=\frac{1}{1-z}+\frac{z}{(1-z)^2}+\ldots+\frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}+\ldots$$

является аналитическим продолжением функции

$$f(z)=1+2z+2^2z^2+\ldots+2^nz^n+\ldots$$

◀ Определим область сходимости рядов для $g(z)$ и $f(z)$. Имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|z|^n}{|1-z|^{n+1}}}=\left|\frac{z}{1-z}\right|<1$$

и

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|2^nz^n|}=2|z|<1,$$

т. е. ряд для $g(z)$ сходится в области $D_1=\{z \mid \operatorname{Re} z<1/2\}$ (см. задачу 12.143), а ряд для $f(z)$ — в области $D_2=\{z \mid |z|<1/2\}$.

Определим суммы этих рядов в указанных областях:

$$g(z)=\frac{1}{1-z}\left(1+\frac{z}{1-z}+\frac{z^2}{(1-z)^2}+\ldots\right)=\frac{1}{1-z}\,\frac{1}{1-\dfrac{z}{1-z}}=\frac{1}{1-2z}$$

и

$$f(z)=\frac{1}{1-2z}.$$

Так как $D_2\subset D_1$ и в области D_2 справедливо тождество $f(z)=g(z)$, то функция $g(z)$ является аналитическим продолжением функции $f(z)$ с области D_2 на область D_1. ▶

12.252. Доказать, что при любом $a\neq 0$ и $|a|\neq 1$ функциональное уравнение $f(z)=f(az)$ не имеет решения, аналитического в точке $z=0$ и ее окрестности, отличного от $f(z)\equiv\text{const}$.

12.253*. Доказать теорему единственности в том случае, когда $\forall z\in D\ g(z)=0$, т. е. доказать следующую теорему: если аналитическая в области D функция $f(z)$ обращается в нуль в точках $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, лежащих в области D и таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} z_k=a\in D$, то $\forall z\in D\ f(z)=0$.

12.254. Будет ли аналитической в точке $z=0$ и ее окрестности функция $f(z)$, если она при всех целых $n>n_0$ удовлетворяет соотношению $f\left(\frac{1}{n}\right)=\sin\frac{\pi n}{2}$?

Найти аналитические в окрестности точки $z=0$ функции $f(z)$, удовлетворяющие условиям:

12.255. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

12.256. $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}$, $n\in\mathbb{N}$.

12.257. Показать, что функция $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ является аналитическим продолжением функции $f(z)=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$. Найти аналитическое выражение этих функций в общей части областей сходимости рядов.

12.258. Показать, что функция $g(z)=\ln(2+2i)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1-2i)^n}{n(2+2i)^n}$ является аналитическим продолжением функции $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}$. Найти аналитическое выражение этих функций в общей части областей сходимости рядов.

§ 4. Применение степенных рядов

1. Вычисление значений функций. Разложения а)—ж) из § 3 позволяют получать значения соответствующих функций в заданных точках с любой точностью.

П р и м е р 1. Найти число e с точностью до 10^{-5}.

◀ Подставив $x=1$ в разложение функции e^x, имеем

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Оценим остаток

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ldots k}<\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{k-n}}=$$

$$=\frac{1}{n!}\cdot\frac{\dfrac{1}{n+1}}{1-\dfrac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!\,n}.$$

Следовательно, равенство $e=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ имеет предельную абсолютную погрешность, равную $\frac{1}{n!\,n}$. Найдем n, для которого $\frac{1}{n!\,n}<0{,}00001$ или $n!\,n>100000$. Получаем $n\geqslant 8$. Вычисляя $2+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}$ и округляя, находим ответ с требуемой точностью $e=2{,}71828$. ▶

12.259. Определить, сколько нужно взять членов в разложении функции $\ln(1+x)$, чтобы вычислить $\ln 2$ с точностью до 10^{-4}.

12.260. Определить, сколько нужно взять членов ряда в разложении функции $\cos x$, чтобы вычислить $\cos 10°$ с точностью до 10^{-4}.

12.261. С какой предельной абсолютной погрешностью можно вычислить

$$\sqrt[5]{36}=(32+4)^{1/5}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/5},$$

взяв три члена биномиального ряда?

12.262. При каких x многочлен $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ дает значение функции $\sin x$ с точностью до 10^{-4}?

12.263. Какова предельная абсолютная погрешность равенства

$$\sqrt{a^2+x}=a+\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{8a^3}$$

при вычислении $\sqrt{5}$?

Используя соответствующие разложения, вычислить указанные значения функций с точностью до 10^{-4}:

12.264. $\sqrt{e}$. **12.265.** $\frac{1}{e}$. **12.266.** $\sin\frac{\pi}{5}$. **12.267.** $\sin 12°$.

12.268. $\cos 1$. **12.269*.** $\sin 1000$. **12.270*.** $\sqrt[3]{520}$.

12.271*. $\sqrt{15}$. **12.272*.** $\sqrt[4]{700}$. **12.273*.** $\ln 2$.

12.274. $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.

12.275. $I_0(0,5)$, где $I_0(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$.

12.276. $\operatorname{sh} 1$. **12.277.** $\operatorname{ch} 1$.

В задачах 12.278—12.287, используя разложения в степенные ряды, требуется составить на фортране подпрограммы-функции для вычисления значений указанных функций с заданной предельной абсолютной погрешностью. Использовать параметры X, EPS, где X — аргумент, EPS — предельная абсолютная погрешность. Имена подпрограмм выбрать не совпадающими с именами соответствующих стандартных подпрограмм-функций.

12.278*. $y=\sin x$. **12.279.** $y=\cos x$. **12.280*.** $y=e^x$.

12.281*. $y=(1+x)^\alpha$. **12.282.** $y=\ln(1+x)$.

12.283*. $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$. **12.284.** $y=\operatorname{arctg} x$.

12.285. $y=I_0(x)$ (см. задачу 12.275).

12.286. $y=\operatorname{sh} x$. **12.287.** $y=\operatorname{ch} x$.

12.288. Составить на фортране программу решения одной из задач 12.264—12.277, применяя подпрограммы-функции, полученные при решении задач 12.278—12.287. В программе предусмотреть сравнение результатов, вычисленных с помощью составленной подпрограммы-функции и с помощью стандартной подпрограммы-функции, входящей в библиотеку обязательных подпрограмм.

2. Интегрирование функций. Разлагая подынтегральную функцию $f(t)$ в степенной ряд, можно, используя теорему об интегрировании степенных рядов, представить интеграл $\int\limits_0^x f(t)\,dt$ в виде степенного ряда и подсчитать величину этого интеграла с заданной точностью при любом значении x из интервала сходимости полученного ряда.

Пример 2. Разложить функцию $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ в степенной ряд по степеням x.

◀ Используя разложение $e^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, получим

$$e^{-t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{k!}$$

на всей числовой оси. Применяя почленное интегрирование, находим

$$\int_0^x e^{-t^2}dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!}. \;▶$$

Разложить указанные функции в степенные ряды по степеням x:

12.289. $\int\limits_0^x\frac{\ln(1+t^2)}{t}dt$. **12.290.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}\int\limits_0^x\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$.

12.291. $\int\limits_0^x\cos t^2\,dt$. **12.292.** $\int\limits_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

12.293. $\int\limits_0^x I_0(t)\,t\,dt$ (см. задачу 12.275). **12.294.** $\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}dt$.

Вычислить интегралы с точностью до 10^{-4}:

12.295. $\int\limits_0^{0,5}\frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$. **12.296.** $\int\limits_0^{0,2}\frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$.

12.297. $\int\limits_0^{0,5}e^{-t^2}\,dt$. **12.298.** $\int\limits_0^{0,5}\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

12.299. $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^4}$. **12.300.** $\int\limits_0^{1}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

В задачах 12.301—12.305, используя разложения в степенные ряды, составить на фортране подпрограмму-функцию для вычисления указанных интегралов с заданной предельной абсолютной погрешностью. Параметры: X, EPS, где X — верхний предел интегрирования, EPS — предельная абсолютная погрешность.

12.301. $\operatorname{Si}(x)=\int\limits_0^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt$. **12.302.** $\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{x}e^{-t^2}\,dt$.

12.303. $\int\limits_0^{x}(1+t^s)^{\alpha}\,dt\ (s>0,\ \alpha\neq 0)$. **12.304.** $\int\limits_0^{x}\frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$.

12.305. $\int\limits_0^{x}\frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$.

12.306. Используя подпрограммы-функции, полученные при решении задач 12.301—12.305, составить на фортране программу решения одной из задач 12.295—12.300.

3. Нахождение сумм числовых рядов. Убыстрение сходимости. При нахождении суммы числового ряда вычисляют его частичную сумму, для которой величина остатка ряда не превосходит заданной абсолютной погрешности. Используя известные разложения в степенные ряды, сумму числового ряда в некоторых случаях можно выразить в виде значения функции в определенной точке.

Доказать указанные равенства:

12.307. $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)}=\frac{1}{\alpha+n}$.

12.308*. $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)}=\frac{1}{2(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$.

12.309*. $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)\ldots(\alpha+k+p)}=$

$$=\frac{1}{p(\alpha+n)\ldots(\alpha+n+p-1)}\quad(p\in\mathbb{N}).$$

12.310*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2$.

12.311*. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

Найти суммы рядов, не вычисляя частичных сумм:

12.312. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$. **12.313.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}$. **12.314.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

12.315. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\,3^{2n+1}}$. **12.316.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$.

12.317. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n\cdot(2n)!}$. **12.318.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

При нахождении суммы числового ряда требуется брать большое число членов, если остаток этого ряда медленно стремится к нулю. Такой ряд следует преобразовать в ряд, остаток которого стремится к нулю быстрее. Данное преобразование называется *убыстрением сходимости* ряда. Одним из методов убыстрения сходимости является *метод Куммера*. Неизвестная сумма A сходящегося ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k \tag{1}$$

вычисляется по формуле

$$A=qB+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-qb_k), \tag{2}$$

где B — известная сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ такого, что существует предел

$$q=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}\neq 0.$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-qb_k) \tag{3}$$

сходится быстрее, чем исходный ряд (1), т. е. остаток ряда (3) есть бесконечно малая более высокого порядка, чем остаток ряда (1).

П р и м е р 3. Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ с точностью до 10^{-3}.

◀ Выясним, сколько членов данного ряда нужно взять для достижения требуемой точности. Оценивая остаток (см. задачу 12.307), получаем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{n}<0{,}001,$$

откуда следует, что $n>1000$, т. е. для достижения указанной точности требуется взять 1001 член исходного ряда.

Улучшим сходимость ряда. Положив в формуле (2)

$$a_k=\frac{1}{k^2},\ b_k=\frac{1}{k(k+1)},\ q=1,\ a_k-qb_k=\frac{1}{k^2(k+1)},$$

находим (см. задачу 12.307 при $\alpha=0$ и $n=1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)}. \qquad (4)$$

Применим формулу (2) для преобразования ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)}$, положив теперь $a_k=\frac{1}{k^2(k+1)}$, $b_k=\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, $q=1$ и $a_k-qb_k=\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$. Тогда, учитывая (4), имеем (см. задачу 12.308 при $\alpha=0$ и $n=1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}=$$
$$=1+\frac{1}{2\cdot 2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}.$$

Вычисление суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ свелось к вычислению суммы ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}.$$

Оценивая остаток

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k(k+1)(k+2)}=$$
$$=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3n(n+1)(n+2)},$$

получаем $\frac{1}{3n^3}<0{,}001\cdot 2$, откуда $n^3>\frac{1}{3}\cdot 2000\approx 666{,}7$, или $n\geq 9$, т. е. требуемая точность достигается при $n=9$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}=1+0{,}25+2\cdot 0{,}1975=1{,}645.$$

Применив преобразование (2) еще раз к ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$, можно было бы еще более улучшить сходимость. ▶

В задачах 12.319—12.323, применяя преобразование Куммера, найти суммы указанных рядов с точностью до 10^{-4}, взяв для этого не более 10 членов получившегося ряда. Использовать соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\zeta(p)\quad\text{и}\quad\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}=\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p)\ (p>1).$$

Значения дзета-функции $\zeta(p)$ взять из таблицы

p	$\zeta(p)$
2	1,6449340668
3	1,2020569032
4	1,0823232337
5	1,0369277551
6	1,0173430620
7	1,0083492774
8	1,0040773562

12.319*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$. 12.320*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi}{n}$.

12.321*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2}$. 12.322*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(5n+3)}$.

12.323*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n+2}$.

12.324. Составить на фортране программу решения одной из задач 12.319—12.323.

4. **Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.** Степенные ряды широко применяются при решении дифференциальных уравнений. Для целого ряда дифференциальных уравнений

показано, что решение $y(x)$ представимо в виде степенного ряда

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \qquad (5)$$

коэффициенты которого можно определить с учетом заданного уравнения различными способами.

а) Пусть требуется найти решение уравнения $y''=f(x, y, y')$, удовлетворяющее условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$, причем функция $f(x, y, y')$ в точке (x_0, y_0, y_1) имеет частные производные любого порядка. Тогда коэффициенты $y^{(k)}(x_0)$ ряда (5) определяются путем последовательного дифференцирования исходного уравнения и подстановки в него x_0 и найденных уже значений $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, ...

Пример 5. Найти решение уравнения $y''=x^2y$, удовлетворяющее условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

◀ Имеем $y(0)=0$, $y'(0)=1$, из заданного уравнения находим $y''(0)=0$. Далее, дифференцируя уравнение, имеем

$$\begin{aligned} y''' &= x^2y'+2xy,\\ y^{\text{IV}} &= x^2y''+4xy'+2y,\\ y^{\text{V}} &= x^2y'''+6xy''+6y',\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y^{(k+2)} &= x^2y^{(k)}+2kxy^{(k-1)}+k(k-1)y^{(k-2)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

и при $x=0$ получаем отсюда

$$y^{(k+2)}(0)=k(k-1)y^{(k-2)}(0), \qquad k=2, 3, \ldots$$

Так как $y(0)=y''(0)=y'''(0)=0$ и $y'(0)=1$, то

$$y^{(4n)}(0)=y^{(4n+2)}(0)=y^{(4n+3)}(0)=0$$

и

$$y^{(4n+5)}(0)=(4n+2)(4n+3)y^{(4n+1)}(0)=$$
$$=2\cdot3\cdot6\cdot7\ldots(4n+2)(4n+3), \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot3\cdot6\cdot7\ldots(4n+2)(4n+3)}{(4n+1)!}x^{4n+1}.$$

По признаку Даламбера полученный ряд сходится для любых $x\in\mathbb{R}$, т. е. определяемая этим рядом функция $y(x)$ является решением заданного уравнения при любых x. ▶

Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным условиям:

12.325. $y''=x^2y$, $y(0)=y'(0)=1$.

12.326. $y''=-x^2y'-2xy+1$, $y(0)=y'(0)=0$.

Найти первые 5 членов разложения решения дифференциального уравнения в степенной ряд:

12.327. $y'=2\cos x-xy^2$; $y(0)=1$.

12.328. $y''=-2xy$, $y(0)=y'(0)=1$.

12.329. $y''=y\cos x+x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

б) Если исходное дифференциальное уравнение линейно относительно искомой функции и ее производных, причем коэффициент при старшей производной в точке x_0 отличен от нуля, то решение следует искать в виде ряда (5) с неопределенными коэффициентами a_k, $k=0, 1, \ldots$ Законность такого метода вытекает из утверждения, доказываемого в аналитической теории дифференциальных уравнений, которое мы приведем для уравнения 2-го порядка.

Теорема 1. *Если в дифференциальном уравнении*

$$p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x) \qquad (6)$$

функции $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ *и* $f(x)$ *аналитичны в окрестности точки* x_0 *и* $p_0(x_0)\neq 0$, *то существует решение уравнения* (6), *представимое в виде степенного ряда* $y(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$.

Пример 6. Найти решение (в виде степенного ряда) уравнения

$$y''-xy'+y=1,$$

удовлетворяющее условиям $y(0)=y'(0)=0$.

◀ Ищем решение в виде ряда $y(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$, в котором в силу условий $y(0)=y'(0)=0$ имеем $a_0=a_1=0$. Следовательно, $y(x)=$ $=\sum\limits_{k=2}^{\infty}a_kx^k$. Подставив это выражение в уравнение, получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty}ka_kx^k+\sum_{k=2}^{\infty}a_kx^k=1.$$

Отсюда находим, что $2\cdot1\cdot a_2=1$, т. е. $a_2=\frac{1}{1\cdot2}$, и

$$(k+1)(k+2)a_{k+2}=(k-1)a_k \quad \text{для} \quad k=1, 2, \ldots$$

Так как $a_1=0$, то $a_{2m+1}=0$ для всех $m=0, 1, \ldots$, а для $k=2m$, $m=1, 2, \ldots$, получаем рекуррентную формулу

$$a_{2(m+1)}=\frac{(2m-1)a_{2m}}{(2m+1)(2m+2)}, \qquad m=1, 2, \ldots,$$

из которой выводим равенства

$$a_{2(m+1)}=\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!}.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$y(x)=\frac{x^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!}x^{2m+2},$$

причем полученный ряд сходится при всех $x\in\mathbb{R}$. ▶

Используя степенные ряды, проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

12.330. $y''+xy'+y=1$, $y(0)=y'(0)=0$.

12.331. $y''-xy'+y=x$, $y(0)=y'(0)=0$.

12.332. $y''+xy'+y=x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

в) Если коэффициент при старшей производной в линейном уравнении в точке x_0 обращается в нуль, то следует воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 2. *Если в дифференциальном уравнении*

$$p_0(x)\,y''+p_1(x)\,y'+p_2(x)\,y=0 \tag{7}$$

функции $p_0(x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичны в окрестности точки x_0, причем точка x_0 является нулем порядка s функции $p_0(x)$, нулем порядка не ниже $s-1$ функции $p_1(x)$ и нулем порядка не ниже $s-2$ функции $p_2(x)$, то решение уравнения (7) в окрестности точки x_0 существует и представляется в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x)=(x-x_0)^r\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k,$$

где $a_0\neq 0$ и $r\in R$.

Пример 7. Найти решение (в виде обобщенного степенного ряда) уравнения

$$xy''+y'+xy=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

◀ Коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям теоремы 2, поэтому ищем решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x)=x^r\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r},\quad a_0\neq 0.$$

Имеем

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)\,a_kx^{k+r-1},$$

$$y''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)\,a_kx^{k+r-2}.$$

Подставляя эти ряды в уравнение, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)\,a_kx^{k+r-1}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)\,a_kx^{k+r-1}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r+1}=0,$$

т. е.

$$r^2a_0x^{r-1}+(r+1)^2a_1x^r+\sum_{k=2}^{\infty}\left((k+r)^2a_k+a_{k-2}\right)x^{k+r-1}=0.$$

Отсюда следуют равенства

$$r^2a_0=0,\quad (r+1)^2a_1=0,\quad (k+r)^2a_k+a_{k-2}=0.$$

По условию $a_0\neq 0$. Следовательно, $r=0$, а тогда

$$a_1=0 \quad\text{и}\quad k^2a_k=-a_{k-2},\qquad k=3,\ 4,\ \ldots$$

Из этих равенств заключаем, что $a_{2m+1}=0$ для всех $m=0,\ 1,\ \ldots$ Учитывая начальное условие $y(0)=1$, заключаем, что $a_0=1$, и имеем

рекуррентную формулу

$$a_{2m}=-\frac{a_{2m-2}}{(2m)^2},$$

из которой получаем

$$a_{2m}=(-1)^m\frac{a_0}{((2m)!!)^2}=(-1)^m\frac{1}{2^{2m}\,(m!)^2}.$$

Следовательно, искомое решение запишется в виде

$$y(x)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{2^{2m}\,(m!)^2},\qquad x\in R. ▶$$

Найти общее решение дифференциального уравнения в виде обобщенного степенного ряда:

12.333*. $xy''+2y'+xy=0$. **12.334.** $4xy''+2y'+y=0$.

5. Уравнение и функции Бесселя. Частным случаем уравнения (6), коэффициенты которого удовлетворяют условиям теоремы 2, является уравнение Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)\,y=0. \tag{8}$$

Его решениями являются цилиндрические функции Бесселя первого рода порядка ν

$$I_\nu(x)=a_0^{(\nu)}x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)} \tag{9}$$

и для нецелых ν

$$I_{-\nu}(x)=a_0^{(\nu)}x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,(1-\nu)(2-\nu)\ldots(k-\nu)}. \tag{10}$$

Если же ν — целое число, $\nu=n$, то вторым частным решением уравнения Бесселя (8) является функция Неймана (или Вебера), определяемая из соотношения

$$N_n(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{I_\nu(x)\cos\nu\pi-I_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi},$$

являющаяся цилиндрической функцией второго рода порядка n. Постоянная $a_0^{(\nu)}$ в формулах (9) и (10) берется обычно следующая:

$$a_0^{(\nu)}=\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}, \tag{11}$$

где $\Gamma(\nu)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}x^{\nu-1}\,dx$ — гамма-функция Эйлера.

12.335. Используя представление (9) для $I_\nu(x)$, доказать следующие соотношения:

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu I_\nu(x)\right)=x^\nu I_{\nu-1}(x), \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{I_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{I_{\nu+1}(x)}{x^\nu}. \tag{13}$$

12.336. Исходя из соотношений (12) и (13), вывести соотношения

$$I_{\nu-1}(x)+I_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}I_\nu(x),$$

$$I_{\nu-1}(x)-I_{\nu+1}(x)=2I'_\nu(x).$$

12.337*. Используя представление (9) и значение $a_0^{(\nu)}$ из (11), выразить $I_{-1/2}(x)$ и $I_{1/2}(x)$ через элементарные функции.

12.338. Доказать, что если $I_\nu(x)$ — решение уравнения (8), то $I_\nu(\alpha x)$ является решением уравнения

$$x^2y''+xy'+(\alpha^2x^2-\nu^2)\,y=0. \tag{14}$$

Записать общее решение уравнения (14).

Используя результат задачи 12.338, найти общие решения уравнений:

12.339. $xy''+y'+4xy=0.$

12.340. $9x^2y''+9xy'+(36x^2-1)\,y=0.$

12.341. $x^2y''+xy'+(3x^2-4)\,y=0.$

12.342. $x^2y''+xy'+\left(9x^2-\dfrac{1}{25}\right)y=0.$

§ 5. Ряды Лорана

1. Ряды Лорана. Теорема Лорана. *Рядом Лорана* называется ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n; \tag{1}$$

при этом ряд

$$f_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$$

называется *главной частью* ряда Лорана, а ряд

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

— *правильной частью*. Если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}=r<R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}},$$

то областью сходимости ряда (1) является кольцо $K=\{z\,|\,0\leqslant r<|z-z_0|<R\}$. В этом кольце K сумма ряда $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ является функцией аналитической, причем коэффициенты ряда c_n связаны с функцией $f(z)$ посредством формул

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta-z_0|=r'}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}\,d\eta,\quad n=0,\ \pm1,\ \ldots, \tag{2}$$

где $r<r'<R$.

Пример 1. Найти область сходимости и сумму ряда Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}.$$

◀ Применяя признак Коши к каждому из этих слагаемых, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n|z-1|^{n+1}}}=\frac{1}{2|z-1|}<1$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n|z-1|^{n-1}}{3^n}}=\frac{|z-1|}{3}<1.$$

Отсюда заключаем, что областью сходимости исходного ряда является кольцо

$$K=\{z\,|\,1/2<|z-1|<3\}.$$

Замечая, что слагаемые являются производными от рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^n(z-1)^n}\quad\text{и}\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n},$$

можем записать, что в кольце K

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}=$$

$$=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(z-1)^n}\right)'+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n}\right)'=$$

$$=-\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2(z-1)}}\right)'+\left(\frac{1}{1-\frac{z-1}{3}}\right)'=$$

$$=-2\left(\frac{z-1}{2z-3}\right)'+\left(\frac{3}{4-z}\right)'=\frac{3}{(4-z)^2}+\frac{2}{(2z-3)^2}.$$

Таким образом, суммой данного ряда является функция

$$f(z)=\frac{3}{(4-z)^2}+\frac{2}{(2z-3)^2},\quad \frac{1}{2}<|z-1|<3. \ ▶$$

Теорема Лорана. *Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $0 \leqslant r < |z-z_0| < R$, то в этом кольце она единственным образом представима в виде ряда Лорана*

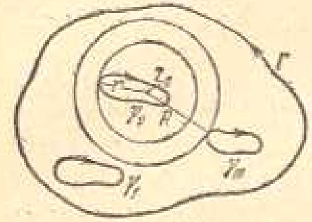

Рис. 99

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам (2).

Следствие. Пусть $f(z)$ аналитична в многосвязной области D, ограниченной контуром Γ и внутренними контурами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ (рис. 99). Если точка z_0 лежит внутри (или на границе) одного из внутренних контуров γ_ν и величина $r = \max\limits_{\eta \in \gamma_\nu} |z_0 - \eta|$ меньше расстояния R от z_0 до остальной части границы области D или до точки, в которой $f(z)$ не аналитична, т. е.

$$0 \leqslant r = \max_{\eta \in \gamma_\nu} |z_0-\eta| < R = \min_{\eta \in \Gamma \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_{\nu-1} \cup \gamma_{\nu+1} \cup \ldots \cup \gamma_m} |z_0 - \eta|,$$

то в кольце $r < |z-z_0| < R$ функция $f(z)$ может быть представлена ее рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z_0)(z-z_0)^n, \quad r < |z-z_0| < R,$$

коэффициенты которого $c_n(z_0)$ определяются по формулам (2).

Рядом Лорана для функции $f(z)$ *в окрестности точки* $z=\infty$ называется ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \quad \left(\text{или} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n\right), \tag{3}$$

сходящийся в некотором кольце $r < |z| < +\infty$ (соответственно $r < |z-a| < +\infty$), при этом главной частью ряда Лорана является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n\right)$, а правильной — ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$ $\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n (z-a)^n\right)$.

Пример 2. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$.

◀ Так как аналитичность функции нарушается в точках $z=0$ и $z=1$, то областью сходимости ряда Лорана будет кольцо $0 < |z| < 1$. Замечая, что при $n \leqslant -2$ функция $\dfrac{1}{z^{n+2}(1-z)}$ аналитична в круге $|z| \leqslant \rho < 1$, можем записать, что

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} \frac{1}{z^{n+2}(1-z)} dz = 0 \quad \text{для} \quad n = -2, -3, \ldots$$

Далее, применяя формулу Коши для функции $\varphi(z) = \dfrac{1}{1-z}$ и ее производных, для $n \geqslant -1$ можем записать

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} \frac{\varphi(z)}{z^{n+2}} dz = \frac{\varphi^{n+1}(0)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{(n+1)!}{(1-z)^{n+2}}\bigg|_{z=0} = 1.$$

Таким образом, для $0 < |z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{4}$$

т. е. главная часть содержит один член, а правильная — бесконечное число членов. ▶

Вычисление контурных интегралов (2), как правило, достаточно затруднительно. Поэтому для разложения функций в ряды Лорана используются искусственные приемы. Так, в примере 2 функцию $f(z)$ можно было бы представить в виде суммы дробей, т. е.

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z},$$

причем первое слагаемое является уже разложением в ряд Лорана по степеням z, а второе слагаемое есть сумма геометрической прогрессии со знаменателем z, т. е. имеем разложение (4).

Найти области сходимости и суммы следующих рядов:

12.343. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(z-2)^n}$. **12.344.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n i^n 2^n}{(z+i)^{n+1}}$.

12.345. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{-n+3}}{n!}$. **12.346.** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-2} (n+1) i^{n+2} (z-i)^n$.

Найти области сходимости рядов:

12.347. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(z+i)^{2n}}{2^n (n+1)} + \dfrac{4n^2}{3^n (z+i)^n}\right)$.

12.348. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(z-2i)^n}{3^n (n^2+1)} + \dfrac{n 2^n}{(z-2i)^n}\right)$.

12.349. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n z^n}$. **12.350.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+i}{4n(z+1)}\right)^n$.

12.351. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{z^2}{3}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2z}\right)^n$.

Найти все разложения указанных функций в ряды Лорана по степеням $z - z_0$ и установить области сходимости полученных разложений:

12.352. $\frac{1}{z(z-1)}$, $z_0=1$. 12.353*. $\frac{1}{z(z-1)}$, $z_0=\infty$.

12.354. $\frac{1}{(z-2)(z+3)}$, $z_0=2$. 12.355. $\frac{1}{(z-2)(z+3)}$, $z_0=-3$.

12.356. $\frac{1}{z^2-4}$, $z_0=\infty$. 12.357. $\frac{z+1}{z^2-3z+2}$, $z_0=1$.

12.358. $\frac{z+1}{z^2-3z+2}$, $z_0=2$. 12.359*. $\frac{z^4}{z^2-2z+1}$, $z_0=\infty$.

12.360. $\frac{z}{(z+1)^2}$, $z_0=-1$. 12.361. $\frac{z^4}{(z+1)^2}$, $z_0=\infty$.

12.362. $\frac{z}{z^2+1}$, $z_0=i$. 12.363. $\frac{z}{z^2+1}$, $z_0=\infty$.

12.364*. $\frac{z}{(z^2+1)^2}$, $z_0=i$. 12.365*. $\frac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_0=\infty$.

12.366. $\frac{\cos z}{z^3}$, $z_0=0$. 12.367. $\frac{\cos z}{z^3}$, $z_0=\infty$.

12.368. $\sin\frac{1}{z-2}$, $z_0=2$. 12.369. $z^2e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$.

12.370. $z^3e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=\infty$. 12.371. $\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$.

12.372. $\frac{1}{z^3+z}$, $z_0=1$. 12.373. $\frac{z+1}{z^2+2z-8}$, $z_0=i$.

12.374. $\frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}$, $z_0=0$. 12.375. $\frac{1}{(z^2-4)(z^2-1)}$, $z_0=0$.

12.376. Найти три первых члена разложения функции $f(z)=\sin\frac{1}{1-z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=\infty$. Какова область сходимости этого ряда?

2. Характер изолированных особых точек. Точка z_0 называется *правильной* точкой для аналитической в области D функции $f(z)$, если существует степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z-z_0)^n$ с радиусом сходимости $r(z_0)>0$, такой, что в общей части круга сходимости $|z-z_0|<r(z_0)$ и области D сумма этого ряда $\varphi_{z_0}(z)$ совпадает с $f(z)$. Точки, не являющиеся правильными, называются *особыми*.

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в кольце $0<|z-z_0|<R$, а z_0 — особая точка.

Аналогично точка $z_0=\infty$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в кольце $r<|z|<\infty$ и $z=\infty$ — особая точка.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=a\neq\infty;$$

полюсом порядка $m\geqslant 1$, если для функции $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ точка z_0 является нулем порядка m, т. е. $g(z)$ имеет вид $g(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, $\varphi(z_0)\neq 0$ (очевидно, что если z_0 — полюс, то $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$);

существенно особой, если $\lim_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Исследование характера бесконечно удаленной особой точки удобнее проводить путем замены $z=\frac{1}{\eta}$, с помощью которой бесконечно удаленная точка $z=\infty$ переходит в точку $\eta=0$.

Пример 3. Найти все особые точки функции $f(z)=\frac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1}$ и определить их характер.

◀ Особыми точками являются точка $z=0$ и точки, в которых знаменатель обращается в нуль.

Имеем $e^{\frac{1}{z}}+1=0$ или $e^{\frac{1}{z}}=-1=e^{2\pi mi+\pi i}$, т. е. $e^{\frac{1}{z}}+1=0$, если $\frac{1}{z_m}=(2m+1)\pi i$, $m\in\mathbb{Z}$, причем эти точки являются нулями 1-го порядка. Следовательно, в точках $z_m=\frac{1}{(2m+1)\pi i}$, $m\in\mathbb{Z}$, функция $f(z)$ имеет полюсы 1-го порядка. Точка $z=0$ не является изолированной особой точкой, так как она является пределом полюсов, ибо $\lim_{m\to\infty} z_m=0$. ▶

12.377*. Доказать, что отсутствие в разложении (1) главной части, т. е. равенство нулю всех коэффициентов c_n с отрицательными номерами ($n=-1, -2, \ldots$), является необходимым и достаточным условием того, что точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

12.378*. Доказать, что наличие в главной части разложения (1) не более $m\geqslant 1$ членов, причем $c_{-m}\neq 0$, а $c_{-n}=0$ для $n\geqslant m+1$, есть необходимое и достаточное условие того, что точка z_0 является полюсом порядка m для функции $f(z)$.

12.379*. Доказать, что если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то существует последовательность точек (z_n), $\lim_{n\to\infty} z_n=z_0$, такая, что $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\infty$.

12.380*. Опираясь на результат задачи 12.379, доказать, что если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа $A\neq\infty$ существует последовательность точек $(z_n(A))$, $\lim_{n\to\infty} z_n(A)=z_0$, такая, что $\lim_{n\to\infty} f(z_n(A))=A$.

12.381. Установить области сходимости правильной и главной частей разложения Лорана (3) в окрестности бесконечно удаленной точки.

Указать все конечные особые точки заданных ниже функций и определить их характер:

12.382. $\frac{1}{(z^2+i)^3}$. 12.383. $\frac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$. 12.384. $\frac{1}{\sin z}$.

12.385. $\frac{z}{(z+1)(z-2)^3(z+i)^2}$. 12.386. $\frac{1}{z^2\sin(z-1)}$.

12.387. $\frac{z}{(z+1)^3(e^z-1)}$. 12.388. $\frac{z(\pi-z)}{\sin 2z}$. 12.389. $\frac{z-\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} z-1}$.

12.390. $\operatorname{tg}^2 z$. 12.391. $e^{\frac{1}{z-3i}}$. 12.392. $\cos\frac{1}{z+2i}$.

12.393. $\operatorname{tg}\frac{1}{z-1}$. 12.394. $\frac{\operatorname{tg}(z-1)}{z-1}$. 12.395. $\frac{1-\cos z}{z^2}$.

12.396. $\frac{\sin z}{z^2}$. 12.397. $\frac{1}{e^z-3}$.

Для заданных ниже функций выяснить характер бесконечно удаленной особой точки (устранимую особую точку считать правильной):

12.398. $\frac{z^2}{5-2z^2}$. 12.399. $\frac{3z^3-5z+2}{z^2+z-4}$. 12.400. $\frac{z}{1-3z^4}$.

12.401. $1-z+2z^2$. 12.402. e^{-z}. 12.403. $\cos z$.

12.404. $e^{\frac{1}{z}}+2z^2-5$. 12.405. $e^{\frac{1}{z^2}}$. 12.406. $e^{\frac{1}{3-2z}}$.

12.407. $e^{-2z}+3z^3-z+8$.

§ 6. Вычеты и их применение

1. Вычет функции и его вычисление. Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0, за исключением может быть самой точки z_0, то *вычетом* функции $f(z)$ относительно точки z_0, обозначаемым $\operatorname{res}[f(z);\ z_0]$ или $\text{выч}[f(z);\ z_0]$, называется число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\eta)\,d\eta$, где C — некоторый простой замкнутый контур, лежащий в области аналитичности $f(z)$ и содержащий внутри себя только одну особую точку z_0. В качестве C удобно брать окружность $|\eta-z_0|=\rho$ достаточно малого радиуса ρ.

Вычет функции совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-z_0$, т. е.

$$\text{выч}[f(z);\ z_0]=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta-z_0|=\rho} f(\eta)\,d\eta.$$

Если $z_0=\infty$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, то

$$\text{выч}[f(z);\ \infty]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R^-} f(\eta)\,d\eta,$$

где $C_R^-=\{\eta \mid |\eta|=R\}$, R достаточно велико и обход контура — по часовой стрелке. Заметим, что если

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n,\quad r<|z|<+\infty,$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=\rho>r}\frac{f(\eta)}{\eta^{n+1}}\,d\eta,\quad n=0,\ \pm1,\ \ldots,$$

то

$$\text{выч}[f(z);\ \infty]=-c_{-1}.$$

Если z_0 — полюс 1-го порядка функции $f(z)$, то

$$\text{выч}[f(z);\ z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z),$$

причем, если $f(z)$ представима в виде $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$, то

$$\text{выч}[f(z),\ z_0]=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Если z_0 — полюс порядка $m\geqslant 2$ функции $f(z)$, то

$$\text{выч}[f(z);\ z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}\left((z-z_0)^m f(z)\right)}{dz^{m-1}}.$$

Пример 1. Найти $\text{выч}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+9};\ 3i\right]$.

◀ Так как точка $z_0=3i$ является полюсом 1-го порядка, то

$$\text{выч}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+9};\ 3i\right]=\lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{e^{iz}}{(z+3i)(z-3i)}=\frac{e^{i\cdot 3i}}{6i}=-\frac{i}{6e^3}.$$ ▶

Пример 2. Найти $\text{выч}\left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3};\ 1\right]$.

◀ Точка $z_0=1$ является полюсом 3-го порядка, поэтому

$$\text{выч}\left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3};\ 1\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3\frac{\cos 2z}{(z-1)^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left(-2^2\cos 2z\right)=-2\cos 2.$$ ▶

Пример 3. Найти $\text{выч}\left[e^{\frac{3}{z-2}};\ 2\right]$.

◀ Точка $z_0=2$ является существенно особой, поэтому для нахождения вычета найдем коэффициент c_{-1} разложения $e^{\frac{3}{z-2}}$ в ряд Лорана по степеням $(z-2)$. Так как

$$e^{\frac{3}{z-2}}=1+\frac{3}{z-2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{3}{z-2}\right)^2+\ldots,\quad 0<|z-2|<+\infty,$$

то $c_{-1}=3$. Следовательно,

$$\text{выч}\left[e^{\frac{3}{z-2}};\ 2\right]=3.$$ ▶

Найти вычеты указанных ниже функций относительно каждого из ее полюсов, отличных от ∞:

12.408. $\frac{z^2+1}{z-2}$. 12.409. $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$. 12.410. $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

12.411. $\frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$. 12.412. $\frac{1}{z(1-e^{2z})}$.

12.413. $\frac{1}{\sin z-\frac{1}{2}}$. 12.414. $\frac{\sin 2z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2(z-1)}$.

12.415. $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$. 12.416. $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$. 12.417. $\operatorname{tg} z$.

12.418. $\operatorname{ctg}^2 z$. 12.419. $\frac{\cos^3 z}{z^3}$. 12.420. $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

12.421. $\frac{1}{z(1-z^2)}$. 12.422. $\frac{1}{z^2-z^3}$. 12.423. $\frac{\cos 4z}{(z-2)^4}$.

Найти вычеты функций относительно точки $z_0=0$:

12.424. $e^{\frac{1}{z}}$. 12.425. $\cos\frac{1}{z}$. 12.426. $\sin\frac{1}{z}$.

Найти вычеты функций относительно точки $z_0=\infty$:

12.427. $\sin\frac{1}{z}$. 12.428. $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$. 12.429*. $\frac{\sin z}{z^2+9}$.

12.430. $\frac{z^4+z}{z^6-1}$. 12.431. $z\cos^2\frac{\pi}{z}$. 12.432. $\frac{z^3}{z-1}\sin\frac{1}{z}$.

2. Теоремы о вычетах и их применение к вычислению контурных интегралов.

Первая теорема о вычетах. *Если функция $f(z)$ аналитична в области D, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_N$, лежащих в этой области, то для любого простого замкнутого контура $C\subset D$, охватывающего точки $z_1, z_2, \ldots, z_N$,*

$$\int_{C+} f(\eta)\,d\eta=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\text{выч}\,[f(z);\ z_k].$$

Вторая теорема о вычетах. *Если $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_{N-1}$ и $z_N=\infty$, то*

$$\sum_{k=1}^{N}\text{выч}\,[f(z);\ z_k]=0.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_{C+}\frac{e^z}{z^2+4}\,dz$, где $C=\{z\mid |z|=3\}$.

◀ Так как внутри контура C находятся две особые точки подынтегральной функции — полюсы 1-го порядка $z_{1,2}=\pm 2i$, то, применяя

первую теорему о вычетах, можем записать

$$\int_C \frac{e^z}{z^2+4}\,dz=2\pi i\left(\text{выч}\left[\frac{e^z}{z^2+4};\ 2i\right]+\text{выч}\left[\frac{e^z}{z^2+4};\ -2i\right]\right)=$$

$$=2\pi i\left(\left.\frac{e^z}{2z}\right|_{z=2i}+\left.\frac{e^z}{2z}\right|_{z=-2i}\right)=2\pi i\left(\frac{e^{2i}}{4i}-\frac{e^{-2i}}{4i}\right)=\frac{\pi}{2}(e^{2i}-e^{-2i})=$$

$$=\pi i\sin 2=\pi\,\operatorname{sh} 2i. ▶$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^{10}+1}.$$

◀ Подынтегральная функция $f(z)=\frac{1}{z^{10}+1}$ имеет десять особых точек $z_k=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}$, $k=0, 1, \ldots, 9$, являющихся простыми полюсами, лежащими на единичной окружности. Так как разложение функции в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$\frac{1}{z^{10}+1}=\frac{1}{z^{10}\left(1+\frac{1}{z^{10}}\right)}=\frac{1}{z^{10}}\left(1-\frac{1}{z^{10}}+\frac{1}{z^{20}}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z^{10}}-\frac{1}{z^{20}}+\frac{1}{z^{30}}-\ldots,\quad 1<|z|<+\infty,$$

то $-c_{-1}=\text{выч}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ \infty\right]=0$. Поэтому, применяя вторую теорему о вычетах, можем записать, что

$$\sum_{k=0}^{9}\text{выч}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}\right]=-\text{выч}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ \infty\right]=0.$$

Таким образом,

$$I=2\pi i\sum_{k=0}^{9}\text{выч}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}\right]=0. ▶$$

Используя теоремы о вычетах, вычислить следующие интегралы:

12.433. $\int\limits_{C-}\frac{dz}{z^4+1}$, где $C=\{z\mid |z-1|=1\}$.

12.434. $\int\limits_{C+}\frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)}$, где $C=\{z\mid |z-2|=2\}$.

12.435. $\int\limits_{C+}\frac{e^z\,dz}{z^2(z^2+9)}$, где $C=\{z\mid |z|=1\}$.

12.436*. $\int\limits_{C+} \frac{\sin z}{z^2+9}\,dz$, где $C=\{z \mid |z|=4\}$.

12.437. $\int\limits_{C+} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$, где $C=\{z \mid |z|=1\}$, n — натуральное число и $0 \leqslant |a| < 1 < |b|$.

12.438*. $\int\limits_{C+} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$, где $C=\{z \mid |z|=1\}$, n — натуральное число и $0 \leqslant |a| < |b| < 1$.

12.439. $\int\limits_{C+} \sin\frac{1}{z}\,dz$, где $C=\{z \mid |z|=r>0\}$.

12.440. $\int\limits_{C+} \frac{dz}{(z-1)^2 (z^2+1)}$, где $C=\{z \mid |z|=R<1\}$.

12.441. $\int\limits_{C+} \frac{z+1}{e^z+1}\,dz$, где $C=\{z \mid |z|=4\}$.

12.442. $\int\limits_{|z|=R} \left(\sin\frac{1}{z}\right)^n dz$, $n \in \mathbb{N}$.

12.443. $\int\limits_{|z|=R} z^n e^{\frac{2}{z}}\,dz$, $n \in \mathbb{N}$.

12.444. $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{1-e^{z^2}}{z^3(z-i)}\,dz$. 12.445. $\int\limits_{|z|=5} \frac{z^2\,dz}{\sin^3 z \cos z}$.

12.446. $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z\,dz}{z^4+2z^2+1}$.

12.447. $\int\limits_{|z|=1} \left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right) dz$.

12.448. $\int\limits_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z\,dz$. 12.449. $\int\limits_{|z|=1} \frac{z^3\,dz}{2z^4+1}$.

3. Применение вычетов к вычислению определенных интегралов.

а) Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R — символ рациональной функции, с помощью замены $z=e^{ix}$ приводятся к контурным интегралам от рациональных относительно z функций.

Пример 6. Вычислить интеграл Пуассона

$$I(p)=\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2p\cos x+p^2}, \quad |p| \neq 1.$$

◀ Производя замену $z=e^{ix}$, $dz=ie^{ix}\,dx=iz\,dx$, $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$, получаем

$$I(p)=\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(1-p\,\frac{z^2+1}{z}+p^2\right)}=-i\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{-pz^2+p^2z+z-p}=$$

$$=i\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{p(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)}.$$

Так как при любом p, $|p| \neq 1$, внутри круга $|z|<1$ находится только один корень знаменателя подынтегральной функции, то при $|p|<1$ имеем:

$$I(p)=\frac{2\pi i^2}{p}\,\text{выч}\left[\frac{1}{(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)};\ p\right]=\frac{2\pi}{1-p^2},$$

а если $|p|>1$, то

$$I(p)=\frac{2\pi i^2}{p}\,\text{выч}\left[\frac{1}{(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)};\ \frac{1}{p}\right]=\frac{2\pi}{p^2-1}.$$

Таким образом,

$$I(p)=\begin{cases} \frac{2\pi}{1-p^2} & \text{при } |p|<1, \\ \frac{2\pi}{p^2-1} & \text{при } |p|>1. \end{cases}$$ ▶

б) Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, где $f(x)$ — функция, непрерывная на $(-\infty, +\infty)$, аналитическая в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_N$, лежащих в конечной части верхней полуплоскости, и удовлетворяющая для достаточно больших $|z|$ условию

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad M>0, \quad \delta>0.$$

В этом случае

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{N} \text{выч}\,[f(z);\ z_k]. \tag{1}$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.

◀ В верхней полуплоскости функция $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+9)^2}$ имеет один полюс 2-го порядка в точке $z_0=3i$, и $|f(z)|\leqslant\dfrac{M}{|z|^4}$ для достаточно больших $|z|$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)^2}=2\pi i\ \text{выч}\left[\frac{1}{(z^2+9)^2};\ 3i\right]=$$

$$=2\pi i\frac{d}{dz}\left((z-3i)^2\frac{1}{(z^2+9)^2}\right)\Big|_{z=3i}=2\pi i\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+3i)^2}\right)\Big|_{z=3i}=$$

$$=-\frac{4\pi i}{(z+3i)^3}\Big|_{z=3i}=-\frac{4\pi i}{(6i)^3}=\frac{\pi}{54}.\ ▶$$

Замечание. Формула (1) справедлива и в том случае, когда функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=e^{i\alpha z}F(z)$, где $\alpha>0$, а функция $F(z)$ аналитична на действительной оси, в верхней полуплоскости имеет лишь конечное число особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_N$ и $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$.

Пример 8. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\,dx$.

◀ Подынтегральная функция является мнимой частью функции $\dfrac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}$, значения которой совпадают со значениями на действительной оси функции $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+10}e^{iz}$. Функция $F(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+10}$ имеет в верхней полуплоскости полюс 1-го порядка в точке $z_0=1+3i$ и $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$, т. е. выполнены сформулированные в замечании условия, а потому можем записать:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx=2\pi i\ \text{выч}\left[\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10};\ 1+3i\right]=$$

$$=2\pi i\frac{(1+3i)\,e^{i(1+3i)}}{2(1+3i-1)}=\frac{\pi}{3}(1+3i)\,e^{-3+i}=$$

$$=\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1-3\sin 1+i(3\cos 1+\sin 1)).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\,dx=\operatorname{Im}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx=\frac{\pi e^{-3}}{3}(3\cos 1+\sin 1).$$

Заметим, что одновременно мы вычислили интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx=\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx=\frac{\pi e^{-3}}{3}(\cos 1-3\sin 1).\ ▶$$

Используя один из рассмотренных выше методов, вычислить определенные интегралы.

12.450. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x},\quad a>1.$

12.451. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2},\quad a>b>0.$

12.452. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3x}{1-2a\cos x+a^2}\,dx,\quad a>1.$

12.453. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos x\,dx}{1-2a\sin x+a^2},\quad 0<a<1.$

12.454. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{a+b\cos x},\quad a>b>0.$

12.455. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi}\operatorname{ctg}(x-a)\,dx,\quad \operatorname{Im}a>0.$

12.456. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$ 12.457. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n},\ n\in\mathbb{N}.$

12.458. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\quad a>0,\ b>0.$

12.459. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2},\quad a>0.$

12.460. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}.$ 12.461. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx.$

12.462. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4\,dx}{(a+bx^2)^4},\quad a>0,\ b>0.$

12.463. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+20}\,dx.$ 12.464. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2+x+1}\,dx.$

12.465. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx,\quad a>0,\ b>0.$

12.466. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx.$

12.467. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}\,dx.$

12.468. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^3+13x)}{x^4+13x^2+36}\sin x\,dx.$

12.469. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\,dx.$ **12.470.** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+5x^2+4}\,dx.$

4. Принцип аргумента. Пусть функция $f(z)$ в области D, ограниченной простым замкнутым контуром C, имеет конечное число N нулей и конечное число P полюсов, где каждый нуль и каждый полюс считаются столько раз, какова их кратность, причем на контуре C не имеет ни нулей, ни полюсов. Тогда разность $\omega=N-P$ равна числу оборотов радиус-вектора $w=f(z)$ при обходе точкой z контура C.

Если $f(z)$ — аналитическая в D функция, то $P=0$ и $\omega=N$.

Пример 9. Найти число нулей многочлена $p(z)=z^3-3z+1$, лежащих в правой полуплоскости.

◀ Рассмотрим контур C, состоящий из полуокружности C_R радиуса R, лежащей в правой полуплоскости, и отрезка мнимой оси $[-iR,\ iR]$, и для достаточно большого R применим к этому контуру принцип аргумента.

Так как

$$p(z)=z^3\left(1-\frac{3}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right), \tag{2}$$

то очевидно, что при обходе точкой z контура C_R против часовой стрелки $\arg z$ получает приращение π, а потому $\arg(z^3)$ получит приращение 3π (C_R отображается в кривую $w=R^3e^{i\psi}$, $-3\pi/2\leqslant\psi\leqslant 3\pi/2$). Так как второй сомножитель в (2) для достаточно больших R близок к 1, то и приращение аргумента этого множителя мало. Пусть теперь $z=it$, т. е. точка z движется по мнимой оси от точки iR до точки $-iR$. Тогда

$$p(it)=u+iv=1-i(t^3+3t),\quad \text{т. е.}\ u=1,\ v=-t^3-3t.$$

Это означает, что при изменении t от R до $-R$ при $R\to+\infty$ $\arg p(it)$ изменяется на π (от $-\pi/2$ до $\pi/2$). Таким образом, общее приращение $\arg p(z)$ при обходе контура равно 4π, а это означает, что $N=2$, т. е. в правой полуплоскости многочлен $p(z)=z^3-3z+1$ имеет два нуля. ▶

Для данных многочленов найти количество корней, лежащих в правой полуплоскости:

12.471*. $p(z)=z^4+2z^3+3z^2+z+2.$

12.472. $p(z)=2z^4-3z^3+3z^2-z+1.$

12.473. $p(z)=z^4+z^3+4z^2+2z+3.$

12.474*. Доказать, что если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитичны в замкнутой области $\bar D=D+\Gamma$ и для точек $\eta\in\Gamma$ справедливо неравенство $|\varphi(\eta)|<|f(\eta)|$, то число

нулей функции $F(z)=f(z)+\varphi(z)$, лежащих в области D, совпадает с числом нулей функции $f(z)$ (теорема Руше).

12.475*. Доказать основную теорему высшей алгебры: многочлен $p_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ степени n имеет в плоскости (z) точно n нулей.

Опираясь на теорему Руше (задача 12.474), найти число нулей данных функций в указанных областях:

12.476*. $F(z)=z^8+2z^3+8z+1$: а) в круге $|z|<1$; б) в кольце $1\leqslant|z|<2$.

12.477. $F(z)=z^3-5z+1$: а) в круге $|z|<1$; б) в кольце $1\leqslant|z|<2$; в) в кольце $2\leqslant|z|<3$.

§ 7. Ряды Фурье. Интеграл Фурье

1. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье. Тригонометрическая система функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

является *ортогональной* на отрезке $[-\pi,\ \pi]$ (как, впрочем, и на всяком отрезке длины 2π), т. е. интеграл по этому отрезку от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю.

Если $f(x)\in L(-\pi,\pi)$ $\left(\text{т. е.}\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx<+\infty\right)$, то существуют числа

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx,\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

называемые *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$; ряд

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1}$$

называется *рядом Фурье* функции $f(x)$. Члены ряда (1) можно записать в виде гармоник

$$a_k\cos kx+b_k\sin kx=A_k\cos(kx-\varphi_k)$$

с *амплитудой* $A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$, *частотой* $\omega_k=k$ и *фазой* $\varphi_k=\operatorname{arctg}\dfrac{b_k}{a_k}$.

Для функции $f(x)$, такой, что $f^2(x)\in L(-\pi,\pi)$, справедливо *равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

Если же $f(x) \in L\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, то коэффициенты Фурье записываются в виде

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x) \cos \frac{2\pi kx}{l}\, dx, \quad \beta_k = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x) \sin \frac{2\pi kx}{l}\, dx, \tag{2}$$

а ряд Фурье — в виде

$$S(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{2\pi kx}{l} + \beta_k \sin \frac{2\pi kx}{l}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi kx}{l}}. \tag{3}$$

Последний ряд называется *рядом Фурье в комплексной форме*. Здесь

$$c_k = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi kx}{l}}\, dx, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots,$$

и для $k \geq 0$

$$c_k = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} = \bar{c}_k.$$

Суммы рядов (1) и (3) имеют соответственно периоды 2π и l.

Функция $f(x)$ называется *кусочно гладкой* на отрезке $[a, b]$, если сама функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ имеют на $[a, b]$ конечное число точек разрыва 1-го рода.

Теорема. *Если периодическая функция $f(x)$ с периодом l кусочно гладка на отрезке $[-l/2, l/2]$, то ряд Фурье (3) сходится к значению $f(x)$ в каждой ее точке непрерывности и к значению $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ в точках разрыва, т. е.*

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi kx}{l}}. \tag{4}$$

Если, дополнительно, $f(x)$ непрерывна на всей оси, то ряд (4) сходится к $f(x)$ равномерно.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \operatorname{sign} x, \quad -\pi < x < \pi,$$

и, пользуясь разложением, найти сумму ряда Лейбница

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

◀ Так как функция нечетная, то (см. задачу 12.479)

$$a_k = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sign} x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4}{\pi(2m-1)} & \text{при } n = 2m-1, \\ 0 & \text{при } n = 2m, \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, при $-\pi < x < \pi$

$$\operatorname{sign} x = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1},$$

откуда при $x = \pi/2$ получаем

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1},$$

т. е.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}. \ ▶$$

12.478. Доказать, что если $f(x)$ имеет период l, то при любом $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+l} f(x)\, dx = \int_0^l f(x)\, dx = \int_{-l/2}^{l/2} f(x)\, dx.$$

12.479. Записать выражения коэффициентов Фурье (2) для четной и нечетной функций на $[-l/2, l/2]$.

Разложить периодическую с периодом l функцию в ряд Фурье, построить графики его первых частичных сумм $S_0(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$ и $S_3(x)$ и найти значение $S(x_0)$ суммы полученного ряда в заданной точке x_0:

12.480. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{при } -\pi < x < 0, \end{cases}$ $l = 2\pi$, $x_0 = \pi$.

12.481. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$, $l = 2\pi$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

12.482. $f(x) = |x|$ при $x \in (-1, 1)$, $l = 2$, $x_0 = 1$.

Разложить в ряд Фурье следующие функции периода l:

12.483. $f(x) = |\cos x|$, $-\pi < x < \pi$; $l = 2\pi$.

12.484. $f(x) = x^3$, $-\pi < x < \pi$; $l = 2\pi$.

12.485. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\tau < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < \tau; \end{cases}$ $l = 2\tau$.

12.486. $f(x) = |\sin x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$; $l = 2\pi$.

12.487. $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$; $l = 1$.

12.488. $f(x) = 10 - x$, $5 < x < 15$; $l = 10$.

12.489. $f(x) = \sin ax$, $-\pi < x < \pi$, $l = 2\pi$.

12.490. $f(x) = \cos ax$, $-\pi < x < \pi$, $l = 2\pi$.

12.491. $f(x) = \operatorname{sh} ax$, $-\pi < x < \pi$, $l = 2\pi$.

12.492. $f(x) = \operatorname{ch} ax$, $-\pi < x < \pi$, $l = 2\pi$.

Доопределяя необходимым образом заданную в промежутке $(0, a)$ функцию до периодической, получить для нее: а) ряд Фурье по косинусам, б) ряд Фурье по синусам.

12.493. $f(x)=e^x,\ x\in(0,\ \ln 2)$.

12.494. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant\pi/2,\\ 0, & \pi/2<x<\pi.\end{cases}$

12.495. $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x<2.\end{cases}$

12.496. $f(x)=x\sin x,\ x\in(0,\ \pi)$.

12.497. $f(x)=x^2,\ x\in(0,\ 1)$.

12.498. $f(x)=x+\frac{\pi}{2},\ x\in(0,\ \pi)$.

12.499. $f(x)=\frac{\pi}{2}-x,\ x\in(0,\ \pi)$.

12.500. $f(x)=x,\ x\in(0,\ l)$.

12.501. Используя ряд Фурье, полученный в задаче 12.482, найти суммы следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$; б)* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{(4k+1)^2(4k+3)^2}$.

12.502. Используя ряд Фурье, полученный в задаче 12.497, найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}$.

12.503. Используя равенство Парсеваля для функции задачи 12.481, найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

12.504*. Зная выражение *ядра Дирихле*

$$\mathcal{D}_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

найти выражение *ядра Фейера* $\mathcal{F}_n(x)$:

$$\mathcal{F}_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{D}_k(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cos kx.$$

12.505. Используя равенство Парсеваля для функции задачи 12.484, найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

12.506. Зная выражение для ядра Дирихле (см. задачу 12.504), получить интегральное представление для частных сумм

$$S_n(f,\ x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

ряда Фурье функции $f(x)$ периода 2π.

12.507. Зная выражение для ядра Фейера (см. задачу 12.504), получить интегральное представление сумм Фейера

$$\sigma_n(f,\ x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(f,\ x)$$

функции $f(x)$ периода 2π.

12.508.** Используя полученное в задаче 12.507 выражение для сумм Фейера $\sigma_n(f, x)$, показать, что для непрерывной на оси функции $f(x)$ в каждой точке $x\in[-\pi,\ \pi]$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f,\ x)=f(x).$$

2. Двойные ряды Фурье. Если функция $f(x,\ y)$ имеет период l по переменной x, период h по переменной y, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ в прямоугольнике $K=\{(x,\ y)\,|-l/2<x<l/2,\ -h/2<y<h/2\}$, то $f(x,\ y)$ представима двойным рядом Фурье

$$f(x,\ y)=\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\lambda_{m,\,n}\left(a_{m,\,n}\cos\frac{2\pi mx}{l}\cos\frac{2\pi ny}{h}+\right.$$
$$+b_{m,\,n}\sin\frac{2\pi mx}{l}\cos\frac{2\pi ny}{h}+c_{m,\,n}\cos\frac{2\pi mx}{l}\sin\frac{2\pi ny}{h}+$$
$$\left.+d_{m,\,n}\sin\frac{2\pi mx}{l}\sin\frac{2\pi ny}{h}\right),$$

где

$$\lambda_{m,\,n}=\begin{cases}1/4 & \text{при } m=n=0,\\ 1/2 & \text{при } m>0,\ n=0 \text{ или } m=0,\ n>0,\\ 1 & \text{при } m>0,\ n>0\end{cases}$$

и при $m\geqslant 0,\ n\geqslant 0$

$$a_{m,\,n}=\frac{4}{lh}\iint_K f(x,\ y)\cos\frac{2\pi mx}{l}\cos\frac{2\pi ny}{h}\,dx\,dy,$$

$$b_{m,\,n}=\frac{4}{lh}\iint_K f(x,\ y)\sin\frac{2\pi mx}{l}\cos\frac{2\pi ny}{h}\,dx\,dy,$$

$$c_{m,\,n}=\frac{4}{lh}\iint_K f(x,\ y)\cos\frac{2\pi mx}{l}\sin\frac{2\pi ny}{h}\,dx\,dy,$$

$$d_{m,\,n}=\frac{4}{lh}\iint_K f(x,\ y)\sin\frac{2\pi mx}{l}\sin\frac{2\pi ny}{h}\,dx\,dy.$$

В комплексной форме ряд Фурье для $f(x, y)$ записывается в форме

$$f(x, y)=\sum_{m,\, n=-\infty}^{+\infty} c_{m,\, n} e^{2\pi i\left(\frac{mx}{l}+\frac{ny}{h}\right)},$$

где

$$c_{m,\, n}=\frac{1}{lh}\iint\limits_{K} f(x, y)\, e^{-2\pi i\left(\frac{mx}{l}+\frac{ny}{h}\right)}\, dx\, dy, \quad m,\, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. Разложить в двойной ряд Фурье функцию $f(x, y)=xy$ в квадрате $-\pi<x<\pi$, $-\pi<y<\pi$.

◀ Принимая во внимание четность или нечетность подынтегральных функций, находим

$$a_{m,\, n}=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{K} xy\cos mx\cos ny\, dx\, dy=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} y\cos ny\, dy\int_{-\pi}^{\pi} x\cos mx\, dx=0, \quad m,\, n\geqslant 0;$$

$$b_{m,\, n}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} y\cos ny\, dy\int_{-\pi}^{\pi} x\sin mx\, dx=0, \quad m,\, n\geqslant 0;$$

$$c_{m,\, n}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} y\sin ny\, dy\int_{-\pi}^{\pi} x\cos mx\, dx=0, \quad m,\, n\geqslant 0;$$

$$d_{m,\, n}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} y\sin ny\, dy\int_{-\pi}^{\pi} x\sin mx\, dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int_{0}^{\pi} y\sin ny\, dy\int_{0}^{\pi} x\sin mx\, dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{y}{n}\cos ny\Big|_0^{\pi}+\frac{\sin ny}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right)\left(-x\frac{\cos mx}{m}\Big|_0^{\pi}+\frac{\sin mx}{m^2}\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{\pi(-1)^{m+1}}{m}=(-1)^{m+n}\frac{4}{mn}, \quad m,\, n\geqslant 1.$$

Следовательно, при $x\in(-\pi, \pi)$, $y\in(-\pi, \pi)$

$$xy=4\sum_{m,\, n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{\sin mx\sin ny}{mn}. \ ▶$$

Разложить в двойной ряд Фурье следующие функции:

12.509. $f(x, y)=xy$ при $0<x<2\pi$, $0<y<2\pi$; $l=h=2\pi$.

12.510. $f(x, y)=\frac{\pi-x}{2}\cdot\frac{\pi-y}{2}$ при $-\pi<x<\pi$, $-\pi<y<\pi$, $l=h=2\pi$.

12.511. $f(x, y)=x^2y$ при $-1<x<1$, $-2<y<2$, $l=2$; $h=4$.

12.512. $f(x, y)=x\left(\frac{\pi-y}{2}\right)^2$ при $-1<x<1$, $-\pi<y<\pi$, $l=2$, $h=2\pi$.

3. Интеграл Фурье. Если функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, т. е. $f(t)\in L(-\infty, +\infty)$, и кусочно гладка на каждом конечном отрезке действительной оси, то она представляется в виде интеграла Фурье

$$f(t)=\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}\hat f(\nu)e^{2\pi i\nu t}\, d\nu=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat f(\nu)e^{2\pi i\nu t}\, d\nu, \quad (5)$$

где

$$\hat f(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\, dt. \quad (6)$$

Преобразование (6), которое будем обозначать $\mathfrak{F}[f]$, называют *прямым*, а (5) — *обратным преобразованием Фурье*, выраженным в комплексной форме. В действительной форме эти преобразования записываются в виде:

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt, \quad b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\, dt \quad (7)$$

(прямое) и

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}(a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\sin\omega t)\, d\omega \quad (8)$$

(обратное), $\omega=2\pi\nu$.

Если функция $f(t)$ четная, то (7) и (8) записываются в следующей симметрической форме:

$$\mathfrak{F}_c[f]=\hat f_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt \quad (9)$$

и

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\hat f_c(\omega)\cos\omega t\, d\omega \quad (10)$$

и называются парой *косинус-преобразований Фурье*. Если же $f(t)$ нечетная, то имеем пару *синус-преобразований Фурье*

$$\mathfrak{F}_s[f]=\hat f_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$$

и

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\hat f_s(\omega)\sin\omega t\,d\omega.$$

Пример 3. Найти преобразование Фурье для функции $f(t)=e^{-\alpha|t|}$, $\alpha>0$.

◀ Подставляя заданную $f(t)$ в (5), получаем

$$\tilde f(\nu)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}e^{-2\pi i\nu t}dt=\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-(2\pi i\nu-\alpha)t}dt+\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-(2\pi i\nu+\alpha)t}dt=$$

$$=\frac{1}{\alpha-2\pi i\nu}e^{(\alpha-2\pi i\nu)t}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{\alpha+2\pi i\nu}e^{-(2\pi i\nu+\alpha)t}\Big|_{0}^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{\alpha-2\pi i\nu}+\frac{1}{\alpha+2\pi i\nu}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\nu^2},$$

т. е.

$$\mathfrak{F}[e^{-\alpha|t|}]=\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\nu^2},\quad \alpha>0.$$

Подставляя это выражение в (5), получаем

$$e^{-\alpha|t|}=2\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2\pi i\nu t}}{\alpha^2+4\pi^2\nu^2}d\nu=\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\alpha^2+\omega^2}d\omega. \qquad (*)$$

Последнее равенство следует из того, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=\lim_{N\to+\infty}\int\limits_{-N}^{N}\frac{\sin\omega t}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=0.$$ ▶

Пример 4. Найти преобразования Фурье для функции

$$f(t)=e^{-\alpha t^2},\quad \alpha>0.$$

◀ Так как функция $f(t)$ четная, получим пару косинус-преобразований Фурье. Поэтому воспользуемся формулами (9) и (10). Используя результат задачи 8.192, получаем

$$\mathfrak{F}_c[e^{-\alpha t^2}]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha t^2}\cos\omega t\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

и

$$e^{-\alpha t^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\cos\omega t\,d\omega=\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\cos\omega t\,d\omega.$$ ▶

Найти преобразование Фурье в комплексной форме для функций:

12.513. $f(t)=\operatorname{sign}(t-a)-\operatorname{sign}(t-b)$, $b>a$.

12.514. $f(t)=\begin{cases}h\left(1-\frac{|t|}{a}\right) & \text{при } |t|<a,\\ 0 & \text{при } |t|>a.\end{cases}$

12.515. $f(t)=\begin{cases}\cos at & \text{при } |t|<\pi/a,\\ 0 & \text{при } |t|>\pi/a,\end{cases}\quad a>0.$

12.516. $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sign} t & \text{при } |t|<1,\\ 0 & \text{при } |t|>1.\end{cases}$

Найти пару косинус- или синус-преобразований Фурье указанных функций:

12.517*. $f(t)=\dfrac{1}{a^2+t^2}$, $a>0$.

12.518*. $f(t)=\dfrac{t}{a^2+t^2}$, $a>0$.

12.519. $f(t)=te^{-t^2}$.

12.520. $f(t)=e^{-\alpha|t|}\cos\beta t$, $\alpha>0$.

12.521. Доказать, что преобразование (6) является непрерывной функцией, причем $\lim\limits_{\nu\to\pm\infty}\tilde f(\nu)=0$.

4. Спектральные характеристики ряда и интеграла Фурье. *Спектральной функцией* $S(\nu_k)$ ряда Фурье или *спектральной плотностью* называется отношение коэффициента Фурье функции $f(x)$ периода l

$$c_k=c(\nu_k)=\frac{1}{l}\int\limits_{-l/2}^{l/2}f(u)e^{-2\pi i\nu_k u}du,$$

$\nu_k=\dfrac{k}{l}$, $k\in\mathbb{Z}$, к приращению частоты $\Delta\nu_k=\dfrac{k+1}{l}-\dfrac{k}{l}=\dfrac{1}{l}$, т. е.

$$S(\nu_k)=\frac{c(\nu_k)}{\Delta\nu_k}=\int\limits_{-l/2}^{l/2}f(u)e^{-2\pi i\nu_k u}du.$$

Амплитудным спектром $\rho(\nu_k)$ называется модуль спектральной функции, а *фазовым спектром* $\Phi(\nu_k)$ — взятый с обратным знаком аргумент спектральной функции, т. е.

$$\rho(\nu_k)=|S(\nu_k)|=l\,|c(\nu_k)|$$

и

$$\Phi(\nu_k)=-\arg S(\nu_k).$$

На графиках $\rho(\nu_k)$ и $\Phi(\nu_k)$ обычно строят только ординаты ρ и Φ в точках ν_k и спектр называют линейчатым.

Пример 5. Найти спектральную функцию ряда Фурье и построить амплитудный и фазовый спектры для функции

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\in(-2,-1),\\ 1 & \text{при } x\in(-1,1),\\ 0 & \text{при } x\in(1,2),\end{cases}\qquad f(x+4)=f(x).$$

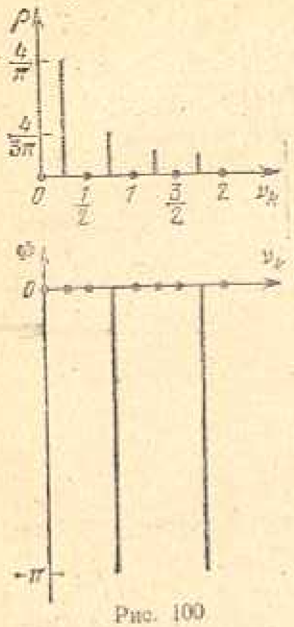

Рис. 100

◀ Имеем $\nu_k = k/4$ и

$$S(\nu_k) = \int_{-2}^{2} f(x) e^{-2\pi i \nu_k x}\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} 1 \cdot e^{-2\pi i \nu_k x}\, dx = \left.\frac{e^{-2\pi i \nu_k x}}{-2\pi i \nu_k}\right|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\pi \nu_k} \frac{e^{2\pi i \nu_k} - e^{-2\pi i \nu_k}}{2i} = \frac{\sin 2\pi\nu_k}{\pi\nu_k}.$$

Следовательно,

$$\rho(\nu_k) = |S(\nu_k)| = \frac{|\sin 2\pi\nu_k|}{\pi|\nu_k|},$$

$$\Phi(\nu_k) = -\arg S(\nu_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sin 2\pi\nu_k \geqslant 0, \\ -\pi, & \text{если } \sin 2\pi\nu_k < 0. \end{cases}$$

Графики $\rho(\nu_k)$ и $\Phi(\nu_k)$ представлены на рис. 100. ▶

Спектральной функцией интеграла Фурье называется прямое преобразование Фурье

$$S(\nu) \equiv \tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt. \tag{11}$$

Величина $\rho(\nu) = |S(\nu)|$ называется *амплитудным спектром*, а величина $\Phi(\nu) = -\arg S(\nu)$ — *фазовым спектром*.

Найти спектральные функции $S(\nu_k)$ или $S(\nu)$ и построить амплитудные и фазовые спектры следующих функций:

12.522. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \in (-2T, -T), \\ -1 \text{ при } t \in (-T, 0), \\ 1 \text{ при } t \in (0, T), \\ 0 \text{ при } t \in (T, 2T), \end{cases} \quad f(t + 4T) = f(t).$

12.523. $f(t) = \begin{cases} 2 \text{ при } t \in (0, 1), \\ 0 \text{ при } t \in (1, 3), \end{cases} \quad f(t+3) = f(t).$

12.524. $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } |t| < a, \\ 0 \text{ при } |t| > a, \end{cases} \quad a > 0.$

12.525*. $f(t) = \begin{cases} \cos \pi t \text{ при } |t| \leqslant 1/2, \\ 0 \text{ при } |t| > 1/2. \end{cases}$

12.526. $f(t) = \begin{cases} 1 + t \text{ при } t \in (-1, 0), \\ 1 - t \text{ при } t \in (0, 1), \\ 0 \text{ при } |t| > 1. \end{cases}$

12.527. $f(t) = \begin{cases} 2 \text{ при } t \in (0, 2), \\ 0 \text{ при } t \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \end{cases}$

5. **Дискретное преобразование Фурье (ДПФ).** Аналитическое вычисление преобразования Фурье (спектральной функции) (11) и обратного преобразования (5) вызывает, как правило, значительные трудности. Разработаны методы их численной реализации, одним из которых является так называемое *дискретное преобразование Фурье*:

$$\tilde{S}(\nu_n) = y_n = \frac{T}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k) e^{-i\frac{\pi k n}{N}}, \quad n = 0, 1, \ldots, 2N-1, \tag{12}$$

где $t_k = k\frac{T}{2N}$ (T — длина заданного интервала) и $\nu_n = n\frac{1}{T}$. Обратное к (12) преобразование имеет вид

$$f(t_k) = x_k = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{2N-1} y_n e^{i\frac{\pi k n}{N}}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2N-1. \tag{13}$$

Преобразования (12) и (13) выполняются с помощью так называемых *быстрых алгоритмов* (БПФ), состоящих в том, что если $2N = r_1 r_2 \ldots r_n$, r_ν — целые $\geqslant 2$, то матрица преобразования (12) (или (13))

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & q & q^2 & \ldots & q^{2N-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & \ldots & q^{2(2N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & q^{2N-1} & q^{2(2N-1)} & \ldots & q^{(2N-1)^2} \end{pmatrix},$$

где $q = e^{-i\frac{\pi}{N}}$ $\left(q = e^{i\frac{\pi}{N}} \text{ для (13)}\right)$, представляется в виде произведения n квадратных матриц W_ν порядка $2N$,

$$W = W_n W_{n-1} \ldots W_2 W_1, \tag{14}$$

имеющих каждая по $r_\nu \cdot 2N$ отличных от нуля элементов. Умножение матрицы W_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) на вектор-столбец $Z = (z_0, z_1, \ldots, z_{2N-1})^\top$ за счет отбрасывания умножения на нули может быть произведено за $r_\nu \cdot 2N$ операций комплексного умножения на множители q^R и сложения. Всё ДПФ (12) вычисляется тогда за $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) 2N$ таких операций и умножения конечного результата на множитель $T/2N$.

Если $2N = 2^n$ ($r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 2$), то в качестве матрицы $W_m = \left(c_{k,j}^{(m)}\right)$, $k, j = 1, 2, \ldots, 2^n$, для разложения (14) можно взять матрицу, элементы которой выражаются следующим образом $\left(q = e^{-i\frac{\pi}{2^{n-1}}}\right)$: пусть $\nu = 0, 1, \ldots, 2^{n-m} - 1$ и $\mu = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$, тогда

$$c^{(m)}_{\nu\cdot 2^m+\mu,\ \nu\cdot 2^{m-1}+\mu}=c^{(m)}_{\nu\cdot 2^m+2^{m-1}+\mu,\ \nu\cdot 2^{m-1}+\mu}=1,$$

$$c^{(m)}_{\nu\cdot 2^m+\mu,\ 2^{n-1}+\nu\cdot 2^{m-1}+\mu}=-c^{(m)}_{\nu\cdot 2^m+2^{m-1}+\mu,\ 2^{n-1}+\nu\cdot 2^{m-1}+\mu}=$$
$$=q^{(\mu-1)\,2^{n-m}}, \qquad (15)$$

$$c^{(m)}_{k,\,j}=0 \text{ для остальных пар } (k,\ j).$$

12.528. Выписать матрицы W_1, W_2 и W_3, соответствующие формулам (15) при $2N=2^3=8$.

12.529. Пусть $X=(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_7)^{\mathrm{T}}$. Составить произведения $Z^{(1)}=W_1X$, $Z^{(2)}=W_2Z^{(1)}=W_2(W_1X)$ и $Z^{(3)}=W_3Z^{(2)}=W_3(W_2W_1X)$. Сравнить полученный результат с произведением WX.

Для конечной последовательности комплексных чисел $(x_0,\ x_1,\ \ldots$ $\ldots,\ x_{N-1})$ ДПФ по формуле (12) можно представить в виде

$$y_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x_k e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1),$$

а обратное ДПФ (ОДПФ) — в виде

$$x_k=\sum_{n=0}^{N-1}y_n e^{\frac{2\pi i n k}{N}} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1).$$

Обозначим кратко ДПФ и ОДПФ соответственно

$$Y=\mathfrak{F}[X] \text{ и } X=\mathfrak{F}^{-1}[Y],$$

где $X=(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{N-1})^{\mathrm{T}}$, $Y=(y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{N-1})^{\mathrm{T}}$.

12.530. Составить на фортране подпрограмму вычисления прямого и обратного преобразований Фурье с использованием быстрого алгоритма. Параметры: N, L, KIND, A, B, AA, BB, где L — число элементов исходной последовательности (и преобразования), N — показатель степени в равенстве $L=2^N$, KIND есть 0 либо 1 (0 при вычислении ДПФ и 1 при вычислении ОДПФ), A и B — входные массивы размера L для действительной и мнимой частей исходной последовательности, AA и BB — выходные массивы размера L для действительной и мнимой частей полученного преобразования.

В задачах 12.531—12.535 составить на фортране подпрограмму получения комплексной последовательности $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{128})$, полагая $x_k=x(t_k)+i\cdot 0$ для указанных функций $x=x(t)$, $t\in[1,\ 128]$, $t_k=k=1,\ 2,\ \ldots,\ 128$. Параметры: A, B, где A и B — массивы из 128 элементов для действительной и мнимой частей последовательности.

12.531. $x=25$. **12.532.** $x=\begin{cases}0, & t\in[1,\ 32]\cup[97,\ 128],\\ 20, & t\in[33,\ 96].\end{cases}$

12.533. $x=\frac{1}{32}\,t\,(128-t)$.

12.534. $x=\begin{cases}t, & t\in[1,\ 64],\\ 128-t, & t\in[65,\ 128].\end{cases}$ **12.535.** $x=t$.

12.536. Используя подпрограммы, полученные при решении задач 12.530 и 12.531—12.535, для одной из последовательностей $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{128})$ составить на фортране программу следующих преобразований:

а) найти $Y=\mathfrak{F}[X]$;

б) для $m=24,\ 32,\ 40$ из последовательности $(y_n\mid n=1,\ \ldots,\ 128)$ получить последовательность $(\tilde{y}_n\mid n=1,\ \ldots$ $\ldots,\ 128)$, элементы которой определяются равенствами

$$\tilde{y}_n=\begin{cases}y_n, & n=1,\ 2,\ \ldots,\ 64-m,\ 65+m,\ \ldots,\ 128,\\ 0, & n=64-m+1,\ \ldots,\ 65+m-1;\end{cases}$$

в) найти $\tilde{X}=\mathfrak{F}^{-1}[\tilde{Y}]$;

г) сравнить последовательности (x_k) и $(\tilde{x}_k)$, найдя их разности.