Глава 11

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Элементарные функции

1. Понятие функции комплексной переменной. Множество точек E расширенной комплексной плоскости $(z)=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат данному множеству. Связное открытое множество точек комплексной плоскости называется *областью* и обозначается через D, G и т. п. Область D называется *односвязной*, если ее граница является связным множеством; в противном случае область D называется *многосвязной*.

Если каждому комплексному числу z, принадлежащему области D, поставлено в соответствие некоторое комплексное число w, то говорят, что в области D определена комплексная функция $w=f(z)$.

Пусть $z=x+iy$ и $w=u+iv$. Тогда функция $w=f(z)$ может быть представлена с помощью двух действительных функций $u=u(x, y)$ и $v=v(x, y)$ действительных переменных x и y:

$$w=f(z)=u+iv=u(x, y)+iv(x, y),$$

где

$$u(x, y)=\operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y)=\operatorname{Im} f(z).$$

Пример 1. Указать область, определяемую условием $|z|-\operatorname{Im} z<1$.

◀ Так как $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ и $\operatorname{Im} z=y$, то получаем неравенство

$$\sqrt{x^2+y^2}-y<1$$

или

$$\sqrt{x^2+y^2}<1+y.$$

Из последнего неравенства следует, что $y>-1$. Возводя обе части неравенства в квадрат, находим $x^2+y^2<1+2y+y^2$. Следовательно, искомая область определяется неравенством $y>\frac{1}{2}(x^2-1)$, т. е. представляет собой открытое множество точек, ограниченное графиком параболы $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$ и содержащее точку $O(0, 0)$. ▶

Пример 2. Найти действительную и мнимую части функции $f(z)=iz^2-\bar{z}$.

◀ Полагая $z=x+iy$, находим

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)=i(x+iy)^2-(x-iy)=$$
$$=i(x^2-y^2+2ixy)-(x-iy)=-x(1+2y)+i(x^2-y^2+y).$$

Таким образом

$$\operatorname{Re} f(z)=u(x, y)=-x(1+2y),$$
$$\operatorname{Im} f(z)=v(x, y)=x^2-y^2+y. \text{ ▶}$$

Описать области, заданные следующими соотношениями, и установить, являются ли они односвязными:

11.1. $|z-z_0|<R$. **11.2.** $1<|z-i|<2$.

11.3. $2<|z-i|<+\infty$. **11.4.** $0<\operatorname{Re}(2iz)<1$.

11.5. $|z-z_0|>R$. **11.6.** $0<|z+i|<2$.

11.7. $\operatorname{Im}(iz)<1$. **11.8.** $\operatorname{Re}\frac{1}{z}>\frac{1}{4}$.

Указать на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

11.9*. $\operatorname{Im}\frac{z+1}{z-i}=0$. **11.10.** $|z-i|+|z+i|<4$.

11.11. $\operatorname{Re}\frac{z-2i}{z+2i}=0$. **11.12.** $|z-5|-|z+5|<6$.

11.13. $\arg\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$. **11.14*.** $\arg\frac{i-z}{z+i}=0$.

Записать с помощью неравенств следующие открытые множества точек комплексной плоскости:

11.15. Первый квадрант.

11.16. Левая полуплоскость.

11.17. Полоса, состоящая из точек, отстоящих от мнимой оси на расстояние, меньшее трех.

11.18. Внутренность эллипса с фокусами в точках $1+i$, $3+i$ и большой полуосью, равной 3.

11.19. Внутренность угла с вершиной в точке z_0 раствора $\pi/4$, симметричного относительно луча, параллельного положительной мнимой полуоси.

Для следующих функций найти действительную и мнимую части:

11.20. $f(z)=i\bar{z}+2z^2$. **11.21.** $f(z)=2i-z+iz^2$.

11.22. $f(z)=\frac{z+i}{i-\bar{z}}$. **11.23.** $f(z)=\frac{\bar{z}}{i}+\frac{i}{\bar{z}}$.

11.24. $f(z)=\operatorname{Re}(z^2+i)+i\operatorname{Im}(z^2-i)$. **11.25.** $f(z)=\frac{z^2+z+1}{iz+\bar{z}}$.

Определить функцию $w=f(z)$ по известным действительной и мнимой частям:

11.26. $u(x, y)=x+y$, $v(x, y)=x-y$.

◀ Если $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$, то $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$ и $y=-\frac{i}{2}(z-\bar{z})$.

Тогда

$$u(x,\ y)=x+y=\frac{1}{2}(z+\bar z)-\frac{i}{2}(z-\bar z)=\frac{1-i}{2}z+\frac{1+i}{2}\bar z;$$

$$v(x,\ y)=x-y=\frac{1}{2}(z+\bar z)+\frac{i}{2}(z-\bar z)=\frac{1+i}{2}z+\frac{1-i}{2}\bar z.$$

Следовательно,

$$f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)=\frac{1-i}{2}z+\frac{1+i}{2}\bar z+\frac{1+i}{2}iz+\frac{1-i}{2}i\bar z=$$

$$=\left(\frac{1-i}{2}+\frac{1+i}{2}i\right)z+\left(\frac{1+i}{2}+\frac{1-i}{2}i\right)\bar z=(1+i)\bar z.$$

Таким образом, $f(z)=(1+i)\bar z$.

Рассмотренный в задаче метод позволяет в общем случае получить для функции комплексной переменной выражение, зависящее от z и $\bar z$. ▶

11.27. $u(x,\ y)=x^2-y^2-2y-1,\ v(x,\ y)=2xy+2x.$

11.28. $u(x,\ y)=x\dfrac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2},\ v(x,\ y)=y\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}.$

11.29. $u(x,\ y)=\dfrac{1}{x},\ v(x,\ y)=\dfrac{1}{y}.$

Функция $w=f(z)$ называется *однолистной* в области D, если любым различным значениям $z_1\neq z_2$, взятым из области D, соответствуют различные значения функции $f(z_1)\neq f(z_2)$.

Найти области однолистности следующих функций:

11.30. $f(z)=z^2.$

◀ Пусть $z_1=\rho_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2=\rho_2e^{i\varphi_2}$. Найдем условие, при котором $z_1^2=z_2^2$, хотя $z_1\neq z_2$. Имеем $\rho_1^2e^{i2\varphi_1}=\rho_2^2e^{i2\varphi_2}$. Отсюда заключаем, что $\rho_1=\rho_2$, а $2\varphi_2=2\varphi_1+2k\pi$ $(k=0,\ 1)$. Так как $z_1\neq z_2$, то $\varphi_2=\varphi_1+\pi$. Таким образом, область однолистности функции $w=z^2$ не должна содержать внутри себя точек, модули которых совпадают, а аргументы отличаются на π, т. е. областью однолистности является любая полуплоскость, например $\operatorname{Re} z>0$ или $\operatorname{Im} z>0$. ▶

11.31. $f(z)=z^n,\ n\in\mathbb{N}.$ **11.32.** $f(z)=e^z.$

11.33. $f(z)=e^{3iz}.$ **11.34.** $f(z)=z+\dfrac{1}{z}.$

Геометрически заданную на D функцию $f(z)$ можно рассматривать как отображение области D плоскости (z) на некоторое множество G плоскости (w), являющееся совокупностью значений $f(z)$, соответствующих всем $z\in D$.

Пример 3. Исследовать отображение, осуществляемое линейной функцией $w=az+b$.

◀ Это отображение можно рассматривать как композицию трех простейших отображений. Действительно, положим

$$w_1=|a|z,$$
$$w_2=e^{i\arg a}w_1,$$
$$w_3=w_2+b.$$

Тогда нетрудно видеть, что $w=w_3\circ w_2\circ w_1$. Из геометрического смысла произведения и суммы комплексных чисел ясно, что отображение w_1 есть отображение растяжения (сжатия при $0<|a|<1$), отображение w_1 представляет собой поворот всей плоскости (w_1) относительно начала на угол $\varphi=\arg a$ и, наконец, отображение w_3 есть параллельный перенос плоскости w_2 на вектор, изображающий комплексное число b. ▶

Найти образы указанных точек при заданных отображениях:

11.35. $z_0=1+i,\ w=z^2+i.$

11.36. $z_0=\dfrac{1+i}{2},\ w=(z-i)^2.$

11.37. $z_0=1-\dfrac{i}{2},\ w=\dfrac{\operatorname{Im} z}{z}.$

11.38. $z_0=3-2i,\ w=\dfrac{z}{\bar z}.$

11.39. Найти образы координатных осей Ox и Oy при отображении $w=\dfrac{z+i}{z-i}.$

Для отображений, задаваемых указанными функциями, найти образы линий $x=C$, $|z|=R$, $\arg z=\alpha$ и образ области $|z|<r$, $\operatorname{Im} z>0$:

11.40. $w=z^2.$ **11.41**.** $w=\dfrac{1}{z}.$

Один из наиболее употребляемых способов задания функций — задание с помощью формулы — в случае функций комплексной переменной часто приводит к многозначным функциям.

Говорят, что в области D определена многозначная функция $w=f(z)$, если каждой точке $z\in D$ поставлено в соответствие несколько комплексных чисел w.

Пример 4. Найти все значения функции $w=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{z}$ в точке $z_0=i$.

◀ Так как $|i|=1$ и $\arg i=\dfrac{\pi}{2}$, то в соответствии с определением корня n-й степени из комплексного числа (см. § 5 гл. 1) находим

$$w_k=\frac{\sqrt{2}}{2}-e^{\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\quad k=0,\ 1.$$

Таким образом,

$$w_0=\frac{\sqrt{2}}{2}-e^{\frac{\pi i}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}=-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}-e^{\frac{5\pi i}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\frac{5\pi}{4}-i\sin\frac{5\pi}{4}=\sqrt{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}. \ \blacktriangleright$$

Найти все значения следующих функций в указанных точках:

11.42. $w=z+\sqrt[4]{z}$, $z_0=-1$.

11.43. $w=\dfrac{\sqrt{z}+i}{\sqrt{z}-i}$, $z_0=i$.

11.44. $w=\sqrt{1-\sqrt{z}}$, $z_0=-i$.

11.45. $w=\sqrt{i+\sqrt{z}}$, $z_0=-1$.

Найти $\operatorname{Arg} f(z)$, если $z=re^{i\varphi}$:

11.46. $f(z)=z^2$. **11.47.** $f(z)=z^3$.

11.48. $f(z)=\sqrt[3]{z+1}$. **11.49.** $f(z)=\sqrt{z-8}$.

11.50. $f(z)=\sqrt{z^2-4}$. **11.51.** $f(z)=\sqrt{\dfrac{z-2}{z+1}}$.

2. Основные элементарные функции комплексной переменной. Следующие функции (как однозначные, так и многозначные) называются основными элементарными:

1. Дробно-рациональная функция

$$\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_m},\quad n,\ m\in\mathbb{N}.$$

Частными случаями этой функции являются:

а) линейная функция

$$az+b,\quad a,\ b\in\mathbb{C},\quad a\neq 0;$$

б) степенная функция

$$z^n,\quad n\in\mathbb{N};$$

в) дробно-линейная функция

$$\frac{az+b}{cz+d},\quad a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{C},\quad c\neq 0,\quad ad-bc\neq 0;$$

г) функция Жуковского

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

2. Показательная функция

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y).$$

3. Тригонометрические функции

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}),\quad \cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}),$$

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

4. Гиперболические функции

$$\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}),\quad \operatorname{ch} z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}),$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\quad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

5. Логарифмическая функция

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi).$$

Функция $\operatorname{Ln} z$ является многозначной. В каждой точке z, отличной от нуля и ∞, она принимает бесконечно много значений. Выражение $\ln|z|+i\arg z$ называется главным значением логарифмической функции и обозначается через $\ln z$. Таким образом,

$$\operatorname{Ln} z=\ln z+2k\pi i.$$

6. Общая степенная функция

$$z^a=e^{a\operatorname{Ln} z},\quad a\in\mathbb{C}.$$

Эта функция многозначная, ее главное значение равно $e^{a\ln z}$. Если $a=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, то получаем многозначную функцию — корень n-й степени из комплексного числа:

$$z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}=e^{\frac{1}{n}(\ln|z|+i(\arg z+2k\pi))}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}.$$

7. Общая показательная функция

$$a^z=e^{z\operatorname{Ln} a},\quad a\in\mathbb{C}.$$

Главное значение этой многозначной функции равно $e^{z\ln a}$. В дальнейшем при $a>0$ полагаем $a^z=e^{z\ln a}$.

8. Обратные тригонометрические функции $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$ и обратные гиперболические функции $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$. Определения этих многозначных функций рассмотрены в примере 7 и задачах 11.70—11.74.

Отображения, осуществляемые некоторыми элементарными функциями, и простейшие свойства этих функций будут рассмотрены позднее (в § 3); здесь ограничимся только вычислением конкретных значений этих функций.

Пример 5. Вычислить $\sin i$.

◀ Имеем:

$$\sin i=\frac{e^{ii}-e^{-ii}}{2i}=\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=i\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}=i\operatorname{sh} 1. \ \blacktriangleright$$

Пример 6. Вычислить $\operatorname{ch}(2-3i)$.

5*

◀ Имеем:

$$\operatorname{ch}(2-3i)=\frac{e^{2-3i}+e^{-2+3i}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^2(\cos 3-i\sin 3)+e^{-2}(\cos 3+i\sin 3)\right)=$$
$$=\cos 3\operatorname{ch}2-i\sin 3\operatorname{sh}2. ▶$$

Пример 7. Найти аналитическое выражение для функции $\operatorname{Arccos} z$ при любом комплексном z. Вычислить $\operatorname{Arccos} 2$.

◀ Так как равенство $w=\operatorname{Arccos} z$ равносильно равенству $\cos w=z$, то можем записать $z=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$. Отсюда находим

$$e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0.$$

Решая это квадратное относительно e^{iw} уравнение, получаем

$$e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$$

(здесь рассматриваются оба значения корня). Из этого равенства находим

$$iw=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}),$$

т. е.

$$w=\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{Arccos} 2=-i\operatorname{Ln}(2\pm\sqrt{3})=-i\ln(2\pm\sqrt{3})+2k\pi. ▶$$

11.52. Используя данное выше определение функции e^z, доказать, что e^z имеет чисто мнимый период $2\pi i$, т. е. $e^{z+2\pi i}=e^z$.

Выделить действительную и мнимую части следующих функций:

11.53. $w=e^{1-z}$. **11.54.** $w=e^{(z+i)^2}$.

11.55. $w=\sin(z-i)$. **11.56.** $w=\operatorname{sh}(z+2i)$.

11.57. $w=\operatorname{tg}(z+1)$. **11.58.** $w=3^{1/z}$.

Доказать тождества:

11.59. $\sin iz=i\operatorname{sh} z$. **11.60.** $\cos iz=\operatorname{ch} z$.

11.61. $\operatorname{tg} iz=i\operatorname{th} z$.

Вычислить значения функций в указанных точках:

11.62. $\cos(1+i)$. **11.63.** $\operatorname{ch} i$. **11.64.** $\operatorname{sh}(-2+i)$.

11.65. $\operatorname{Ln}(-1)$. **11.66.** $\ln i$. **11.67.** $\operatorname{Ln}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

11.68. $\operatorname{ctg}\pi i$. **11.69.** $\operatorname{th}\pi i$.

Получить аналитические выражения для указанных ниже функций и для каждой из них найти значение в соответствующей точке z_0 (см. пример 7):

11.70. $w=\operatorname{Arcsin} z$, $z_0=i$.

11.71. $w=\operatorname{Arctg} z$, $z_0=i/3$.

11.72. $w=\operatorname{Arsh} z$, $z_0=i$.

11.73. $w=\operatorname{Arch} z$, $z_0=-1$.

11.74. $w=\operatorname{Arth} z$, $z_0=1-i$.

Найти значение модуля и главное значение аргумента заданных функций в указанных точках:

11.75. $w=\sin z$, $z_0=\pi+i\ln 3$.

11.76. $w=z^2e^z$, $z_0=-\pi i$.

11.77. $w=1+\operatorname{ch}^2 z$, $z_0=i\ln 2$.

11.78. $w=\operatorname{th} z$, $z=1+i\pi$.

Найти все значения степеней:

11.79. 2^i. **11.80.** $(-1)^i$. **11.81.** $(1+i)^i$.

11.82. $(-1)^{\sqrt{2}}$. **11.83.** $(3-4i)^{1+i}$. **11.84.** $(-3+4i)^{1+i}$.

11.85. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$. **11.86.** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^{1-i}$.

Решить уравнения:

11.87. $e^z-i=0$. **11.88.** $e^{ix}=\cos\pi x$ $(x\in\mathbb{R})$.

11.89. $\ln(z-i)=0$. **11.90.** $\operatorname{sh} iz=-1$.

3. **Предел и непрерывность функции комплексной переменной.** Число $A\neq\infty$ называется *пределом* функции $f(z)$ при $z\to z_0$ и обозначается $A=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $z\neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(z)-A|<\varepsilon.$$

Говорим, что $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, если для любого $R>0$ найдется $\delta=\delta(R)>0$ такое, что для всех $z\neq z_0$ таких, что $|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(z)|>R.$$

Следует иметь в виду, что для данной функции $f(z)$ существование предела по любому фиксированному пути $(z\to z_0)$ еще не гарантирует существование предела $f(z)$ при $z\to z_0$.

Пример 8. Пусть $f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar z}-\dfrac{\bar z}{z}\right)$. Показать, что $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ не существует.

◀ Для предела при $r\to 0$ по любому лучу $re^{i\varphi}$ имеем

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2i}\left(\frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}}-\frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}}\right)=\sin 2\varphi,$$

т. е. эти пределы различны для различных направлений — они заполняют сплошь отрезок $[-1, 1]$, и, следовательно,

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar z}-\frac{\bar z}{z}\right)$$

не существует. ▶

Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если она определена в этой точке и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области D, называется *непрерывной* в этой области.

Функция $f(z)$ называется *равномерно непрерывной* в области D, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек z_1 и z_2 из области D таких, что $|z_1 - z_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

11.91. Используя логическую символику, записать данное выше определение непрерывности функции в области.

Вычислить следующие пределы:

11.92. $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^2 - 4iz - 3}{z - i}$. **11.93.** $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\cos z}{\operatorname{ch} iz}$.

11.94. $\lim\limits_{z \to \frac{\pi i}{4}} \dfrac{\sin iz}{\operatorname{ch} z + i \operatorname{sh} z}$. **11.95.** $\lim\limits_{z \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{2iz} + 1}{e^{iz} + i}$.

Доказать непрерывность на всей комплексной плоскости следующих функций:

11.96. $w = \bar{z}$. **11.97.** $w = |z| \operatorname{Re} z$.

11.98. $w = e^{\bar{z}}$. **11.99.** $w = \cos |z|$.

Как доопределить данные функции в точке $z = 0$, чтобы они стали непрерывными в этой точке:

11.100. $f(z) = \dfrac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$. **11.101.** $f(z) = \dfrac{z \operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}$.

11.102. $f(z) = e^{-1/|z|}$. **11.103.** $f(z) = z/|z|$.

11.104. Доказать, что функция $f(z) = e^{-1/z}$ непрерывна в полукруге $0 < |z| \leqslant 1$, $|\arg z| \leqslant \pi/2$, но не является равномерно непрерывной в этом полукруге, а в любом секторе $0 < |z| \leqslant 1$, $|\arg z| \leqslant \alpha < \pi/2$ она равномерно непрерывна.

§ 2. Аналитические функции. Условия Коши — Римана

1. Производная. Аналитичность функции. Если в точке $z \in D$ существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad z + \Delta z \in D,$$

то он называется *производной* функции $f(z)$ в точке z и обозначается через $f'(z)$ или $\dfrac{df(z)}{dz}$.

Если в точке $z \in D$ функция $f(z)$ имеет производную $f'(z)$, то говорим, что функция $f(z)$ *дифференцируема* в точке z.

Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке области D и имеющая в этой области непрерывную производную $f'(z)$, называется *аналитической в области* D. Будем также говорить, что $f(z)$ *аналитическая в точке* $z_0 \in D$, если $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности точки z_0.

Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была аналитической в области D, необходимо и достаточно существование в этой области непрерывных частных производных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющих условиям Коши — Римана

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}, \tag{1}$$

или, в полярных координатах,

$$\frac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial \varphi}. \tag{2}$$

При выполнении условий (1) или (2) производная $f'(z)$ может быть записана соответственно:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3}$$

или

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right). \tag{4}$$

Формулы дифференцирования функций комплексной переменной аналогичны соответствующим формулам дифференцирования функций действительной переменной.

Пример 1. Доказать, что функция $f(z) = e^{2z}$ аналитична и найти $f'(z)$.

◀ Имеем

$$e^{2z} = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y),$$

т. е.

$$u(x, y) = e^{2x}\cos 2y, \quad v(x, y) = e^{2x}\sin 2y.$$

Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x}\sin 2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\sin 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x}\cos 2y.$$

Следовательно, условия (1) выполняются во всей плоскости, и по первой из формул (3)

$$(e^{2z})' = 2e^{2x}\cos 2y + i2e^{2x}\sin 2y = 2e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) = 2e^{2z}. \ ▶$$

Пример 2. Показать, что функция $w = z^3$ аналитична во всей комплексной плоскости (кроме $z = \infty$).

◀ Действительно, имеем $z = re^{i\varphi}$ и

$$w = z^3 = r^3 e^{i3\varphi} = r^3\cos 3\varphi + ir^3\sin 3\varphi,$$

причем

$$\frac{\partial u}{\partial r}=3r^2\cos 3\varphi, \qquad \frac{\partial v}{\partial r}=3r^2\sin 3\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-3r^3\sin 3\varphi, \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi}=3r^3\cos 3\varphi,$$

т. е. при любом конечном $z=re^{i\varphi}$ выполнены условия (2). Применяя первую из формул (4), имеем

$$f'(z)=(z^3)'=\frac{r}{z}(3r^2\cos 3\varphi+i3r^2\sin 3\varphi)=3z^2. \blacktriangleright$$

Пример 3. Показать, что логарифмическая функция $w=\operatorname{Ln} z$ аналитична во всех конечных точках, кроме $z=0$, причем

$$(\operatorname{Ln} z)'=\frac{1}{z}.$$

◀ Так как

$$\operatorname{Ln} z=\ln r+i(\varphi+2k\pi),$$

то имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi}=1, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial v}{\partial r}=0,$$

т. е. выполнены условия (2), и по первой из формул (4) находим

$$(\operatorname{Ln} z)'=\frac{r}{z}\cdot\frac{1}{r}=\frac{1}{z}. \blacktriangleright$$

Аналитические функции находят применение при описании различных процессов.

Пример 4. Рассмотрим плоское безвихревое течение идеальной несжимаемой жидкости. Пусть $v_x(x, y)$ и $v_y(x, y)$ — компоненты вектора скорости $\boldsymbol{v}$ течения вдоль осей x и y, и пусть

$$V(z)=v_x(x, y)-iv_y(x, y) \tag{5}$$

— комплексная скорость течения. Показать, что $V(z)$ — аналитическая функция.

◀ Из несжимаемости жидкости следует, что дивергенция вектора скорости тождественно равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \tag{6}$$

Далее, течение является безвихревым тогда и только тогда, когда ротор его вектора скорости равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \tag{7}$$

Но равенства (6) и (7) являются условиями Коши—Римана для функции (5), т. е. комплексная скорость $V(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной $z=x+iy$.

Выяснить, в каких точках дифференцируемы функции:

11.105*. $w=z$. **11.106*.** $w=\operatorname{Re} z$. **11.107.** $w=z\operatorname{Im} z$.
11.108. $w=z\operatorname{Re} z$. **11.109**.** $w=|z|$. **11.110.** $w=|z-1|^2$.

11.111*. Предполагая выполненными условия Коши — Римана (1) в декартовых прямоугольных координатах, доказать справедливость условий Коши — Римана (2) в полярных координатах и справедливость формул (4) вычисления производной в полярных координатах.

Проверить выполнение условий Коши — Римана (1) или (2) и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

11.112. $f(z)=e^{az}$. **11.113.** $f(z)=\operatorname{sh} z$.
11.114. $f(z)=z^n$, $n\in Z$. **11.115.** $f(z)=\cos z$.
11.116. $f(z)=\ln(z^2)$. **11.117.** $f(z)=\sin\frac{z}{3}$.

11.118*. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D. Доказать, что если одна из функций

$$u(x, y)=\operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y)=\operatorname{Im} f(z),$$
$$r(x, y)=|f(z)|, \quad \theta(x, y)=\arg f(z)$$

сохраняет в области постоянное значение, то и $f(z)\equiv\text{const}$ в D.

2. **Свойства аналитических функций.** Ряд свойств, характерных для дифференцируемых функций действительной переменной, сохраняется и для аналитических функций.

11.119. Доказать, что если $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические в области D функции, то функции $f(z)\pm g(z)$, $f(z)\cdot g(z)$ также аналитичны в области D, а частное $f(z)/g(z)$ — аналитическая функция во всех точках области D, в которых $g(z)\neq 0$. При этом имеют место формулы

$$(f(z)\pm g(z))'=f'(z)\pm g'(z),$$
$$(f(z)\,g(z))'=f'(z)\,g(z)+f(z)\,g'(z),$$
$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'=\frac{f'(z)\,g(z)-f(z)\,g'(z)}{g^2(z)}.$$

11.120. Пусть $f(z)$ — аналитическая в области D функция с областью значений $G=\{f(z)\,|\,z\in D\}$, и пусть функция $\varphi(w)$ аналитична в области G. Доказать, что $F(z)=\varphi(f(z))$ — аналитическая в области D функция.

Используя утверждение задачи 11.119, найти области аналитичности функций и их производные:

11.121. $f(z)=\operatorname{tg} z$. **11.122.** $f(z)=z\cdot e^{-z}$.
11.123. $f(z)=\frac{z\cdot\cos z}{1+z^2}$. **11.124.** $f(z)=\frac{e^z+1}{e^z-1}$.
11.125. $f(z)=\frac{1}{\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} z}$. **11.126.** $f(z)=\frac{e^z}{z}$.
11.127. $f(z)=\operatorname{cth} z$. **11.128.** $f(z)=\frac{\cos z}{\cos z-\sin z}$.

11.129. Доказать, что действительная и мнимая части аналитической в области D функции $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ являются гармоническими в этой области функциями, т. е. их лапласианы равны нулю:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

11.130. Получить выражение лапласиана Δu в полярных координатах ($u=u(r, \varphi)$).

Заметим, что заданием действительной или мнимой части аналитическая в области D функция определяется с точностью до произвольной (комплексной) постоянной. Например, если $u(x, y)$ — действительная часть аналитической в области D функции $f(z)$, то

$$v(x, y)=\operatorname{Im} f(z)=\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u'_y\,dx+u'_x\,dy,$$

где (x_0, y_0) — фиксированная точка в области D и путь интегрирования также лежит в области D.

Пример 5. Проверить, что функция $u=x^2-y^2-5x+y+2$ является действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$ и найти $f(z)$.

◀ Так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0$$

во всей плоскости, то $u(x, y)$ — гармоническая функция, а тогда

$$v(x, y)=\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (2y-1)\,dx+(2x-5)\,dy=\int\limits_{x_0}^{x}(2y_0-1)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y}(2x-5)\,dy=$$
$$=(2y_0-1)(x-x_0)+(2x-5)(y-y_0)=2xy-x-5y+5y_0+x_0-2x_0y_0,$$

т. е.

$$v(x, y)=2xy-x-5y+C$$

и

$$f(z)=x^2-y^2-5x+y+2+i(2xy-x-5y+C)=$$
$$=(x^2-2ixy-y^2)-5(x+iy)+(-xi+y)+2+Ci=$$
$$=z^2-5z-iz+2+Ci. ▶$$

Пример 6. Показать, что функция вида

$$u(x, y)=a(x^2+y^2)+bx+cy+d,\ a\neq 0,$$

не является действительной (или мнимой) частью никакой аналитической функции.

◀ Действительно, это следует из соотношения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4a\neq 0. ▶$$

Проверить гармоничность приведенных ниже функций в указанных областях и найти, когда это возможно, аналитическую функцию по данной ее действительной или мнимой части:

11.131. $u(x, y)=x^3-3xy^2$, $0\leqslant|z|<+\infty$.
11.132. $v(x, y)=2e^x\sin y$, $0\leqslant|z|<+\infty$.
11.133. $u(x, y)=2xy+3$, $0\leqslant|z|<+\infty$.
11.134. $v(x, y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $0<|z|<+\infty$.
11.135. $u(x, y)=\frac{x}{x^2+y^2}-2y$, $0<|z|<+\infty$.
11.136. $u(x, y)=x^2-y^2+xy$, $0\leqslant|z|<+\infty$.
11.137. $v(x, y)=xy$, $0\leqslant|z|<+\infty$.

§ 3. Конформные отображения

1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Пусть $w=f(z)$ — аналитическая в точке z_0 функция и $f'(z_0)\neq 0$. Тогда $k=|f'(z_0)|$ геометрически равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ (точнее, при $k>1$ имеет место растяжение, а при $k<1$ — сжатие). Аргумент производной $\varphi=\arg f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой L, проходящей через точку z_0, чтобы получить касательную в точке $w_0=f(z_0)$ к образу L' этой кривой при отображении $w=f(z)$. При этом, если $\varphi>0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а если $\varphi<0$, то по часовой.

Таким образом, геометрический смысл модуля и аргумента производной состоит в том, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией, удовлетворяющей условию $f'(z_0)\neq 0$, $k=|f'(z_0)|$ определяет коэффициент преобразования подобия бесконечно малого линейного элемента в точке z_0, а $\varphi=\arg f'(z_0)$ — угол поворота этого элемента.

Пример 1. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ в точке $z_0=1-i$ при отображении $w=z^2-z$.

◀ Так как $w'=2z-1$ и $w'|_{z=1-i}=1-2i$, то

$$k=|1-2i|=\sqrt{5}\quad\text{и}\quad\varphi=\arg(1-2i)=-\operatorname{arctg}2. ▶$$

Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ для заданных отображений $w=f(z)$ в указанных точках:

11.138. $w=z^2$, $z_0=\sqrt{2}(1+i)$. **11.139.** $w=z^2$, $z_0=i$.
11.140. $w=z^3$, $z_0=1+i$. **11.141.** $w=z^3$, $z_0=1$.
11.142. $w=\sin z$, $z_0=0$. **11.143.** $w=ie^{2z}$, $z_0=2\pi i$.

Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при следующих отображениях:

11.144. $w=1/z$. **11.145.** $w=e^{z-1}$.
11.146. $w=\ln(z+1)$. **11.147.** $w=z^2+2z$.

Найти множества всех тех точек z_0, в которых при следующих отображениях коэффициент растяжения $k=1$:

11.148. $w=(z-1)^2$. **11.149.** $w=z^2-iz$.

11.150. $w=\dfrac{1+iz}{1-iz}$. **11.151.** $w=-z^3$.

Найти множества всех тех точек z_0, в которых при следующих отображениях угол поворота $\varphi=0$:

11.152. $w=-\dfrac{i}{z}$. **11.153*.** $w=\dfrac{1+iz}{1-iz}$.

11.154. $w=z^2+iz$. **11.155.** $w=z^2-2z$.

2. Конформные отображения. Линейная и дробно-линейная функции. Взаимно однозначное отображение области D плоскости (z) на область G плоскости (w) называется *конформным*, если в каждой точке области D оно обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений.

Критерий конформности отображения. *Для того чтобы отображение области D, задаваемое функцией $w=f(z)$, было конформным, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была однолистной и аналитической в области D функцией, причем $f'(z)\neq 0$ всюду в D.*

В дальнейшем образ области D при отображении функцией $w=f(z)$ обозначается через E либо через $f(D)$.

Пример 2. Показать, что отображение, осуществляемое функцией $w=z^3$, конформно в области

$$D=\{z\mid 1<|z|<2,\ 0<\arg z<2\pi/3\}.$$

◀ Необходимо проверить, что заданная функция является аналитической, однолистной в D и что всюду в D $f'(z)\neq 0$. Аналитичность функции $w=z^3$ показана выше (см. пример 2 § 2), соотношение $w'=3z^2\neq 0$ для любого $z\in D$ очевидно. Однолистность следует из того, что область D содержится в угле с вершиной в начале координат и величиной $2\pi/3$ (см. задачу 11.31). ▶

Выяснить, какие из заданных функций $w=f(z)$ определяют конформные отображения указанных областей D:

11.156. $w=(z+i)^2$, $D=\{z\mid 1<|z+i|<3,\ 0<\arg z<3\pi/2\}$.

11.157. $w=|z|^2$, $D=\{z\mid |z|<1\}$.

11.158. $w=e^z$, $D=\{z\mid 0<\operatorname{Im} z<2\pi\}$.

11.159. $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $D=\left\{z\,\middle|\,\dfrac{1}{2}<|z|<1\right\}$.

11.160. $w=(z-1)^2$, $D=\{z\mid |z-1|<1\}$.

Отображение, осуществляемое линейной функцией $w=az+b$, рассмотрено выше (см. пример 3 § 1). Оно представляет собой композицию растяжения ($w_1=|a|z$), поворота ($w_2=e^{i\arg a}w_1$) и параллельного переноса ($w_3=w_2+b$). Обратная к линейной функции также есть линейная функция $z=\dfrac{1}{a}w-\dfrac{b}{a}$. Так как $w'=a\neq 0$, то

отображение w конформно во всей расширенной плоскости, причем имеет две неподвижные точки $z_1=\dfrac{b}{1-a}$ (при $a\neq 1$) и $z_2=\infty$.

Пример 3. Выяснить, существует ли линейная функция, отображающая треугольник с вершинами $0,\ 1,\ i$ в плоскости (z) на треугольник с вершинами $0,\ 2,\ 1+i$ в плоскости (w).

◀ Заметим, что треугольник с вершинами $0,\ 1,\ i$ подобен треугольнику с вершинами $0,\ 2,\ 1+i$, причем вершина в точке $z_1=0$ соответствует вершине в точке $w_1=1+i$, вершина в точке $z_2=1$ — вершине в точке $w_2=0$ и вершина в точке $z_3=i$ — вершине в точке $w_3=2$. Выполним последовательно преобразования:

а) $w_1=e^{i\frac{5\pi}{4}}z$ — поворот около начала координат на угол $\alpha=5\pi/4$ против часовой стрелки;

б) $w_2=\sqrt{2}w_1$ — гомотетия с коэффициентом $k=\sqrt{2}$;

в) $w_3=w_2+(1+i)$ — параллельный перенос на вектор, изображающий комплексное число $1+i$.

В результате треугольник с вершинами $0,\ 1,\ i$ отображается на треугольник с вершинами $0,\ 2,\ 1+i$, а осуществляющая это отображение целая линейная функция имеет вид

$$w=w_3\circ w_2\circ w_1=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}z+(1+i)=$$
$$=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z+1+i=(1+i)(1-z).\ ▶$$

11.161. Доказать, что отображение, осуществляемое целой линейной функцией, имеет две неподвижные точки (совпадающие, если $a=1$).

Для указанных ниже отображений найти конечную неподвижную точку z_0 (если она существует), угол поворота φ и коэффициент гомотетии k:

11.162. $w=2z+1$. **11.163.** $w=iz+4$.

11.164. $w=e^{i\frac{\pi}{4}}z-e^{-i\frac{\pi}{4}}$. **11.165.** $w=az+b$.

Дробно-линейная функция

$$w=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq 0,\quad c\neq 0,$$

осуществляет конформное отображение расширенной плоскости (z) на расширенную плоскость (w). При этом под углом между кривыми в точке $z=\infty$ понимается угол в точке $z^*=0$ между образами этих кривых, полученных путем отображения $z^*=\dfrac{1}{z}$. Простейшей дробно-линейной функцией (отличной от линейной) является функция $w=\dfrac{1}{z}$, которая может быть представлена в виде композиции инверсии относительно единичной окружности $w_1=\dfrac{1}{\bar z}$ и комплексного сопряжения $w_2=\overline{w}_1$. Простейшая дробно-линейная функция отображает окружности плоскости (z) в окружности плоскости (w) (прямая линия считается окружностью бесконечного радиуса). Так как общая дробно-линейная функция представляется в виде композиции линейной функции $w_1=cz+d$, простейшей дробно-линейной $w_2=\frac{1}{w_1}$ и снова линейной $w_3=\frac{bc-ad}{c}w_2+\frac{a}{c}$, то она также отображает окружность в окружность.

Дробно-линейная функция $w=w(z)$ вполне определяется заданием образов трех точек. Именно, если $z_1 \to w_1$, $z_2 \to w_2$ и $z_3 \to w_3$, то

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}. \tag{1}$$

Замечание. Если одна из точек z_1, z_2 или z_3 либо w_1, w_2 или w_3 является бесконечно удаленной, то в формуле (1) все разности, содержащие эту точку, следует заменить единицами.

Пример 4. Найти образ окружности $x^2+y^2=2x$ при отображении $w=\frac{1}{z}$.

◀ Полагая $z=x+iy$, имеем $x=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$, $y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$. Подставив эти значения в уравнение в окружности, находим

$$x^2+y^2-2x=z\cdot\overline{z}-(z+\overline{z})=0,$$

и после замены $z=\frac{1}{w}$ имеем

$$\frac{1}{w\overline{w}}-\frac{1}{w}-\frac{1}{\overline{w}}=0,$$

т. е. $w+\overline{w}=1$. Если $w=u+iv$, то $w+\overline{w}=2u$. Таким образом, окружность $x^2+y^2-2x=0$ преобразуется в прямую $u=1/2$, параллельную мнимой оси. ▶

Пример 5. Найти дробно-линейное отображение, переводящее точки -1, i, $i+1$ в точки 0, $2i$, $1-i$.

◀ Используя формулу (1), имеем

$$\frac{w-0}{w-2i}\cdot\frac{1-i-2i}{1-i-0}=\frac{z+1}{z-i}\cdot\frac{i+1-i}{i+1+1},$$

откуда

$$\frac{w}{w-2i}=\frac{1}{5}\,\frac{z+1}{z-i}$$

и

$$w=-\frac{2i(z+1)}{4z-5i-1}. \ ▶$$

Найти образы следующих линий при отображении $w=\frac{1}{z}$:

11.166. Окружности $x^2+y^2=y/3$.

11.167. Прямой $y=-x/2$. **11.168.** Прямой $y=x-1$.

11.169. Окружности $x^2+y^2+2x-2y+1=0$.

11.170. Доказать, что проходящая через начало координат окружность $A(x^2+y^2)+2Bx+2Cy=0$ преобразуется функцией $w=\frac{1}{z}$ в прямую, а любая прямая $Bx+Cy+D=0$ — в окружность, проходящую через начало координат.

Найти дробно-линейное преобразование по заданным условиям:

11.171. Точки i, 1, $1+i$ переходят в точки 0, ∞, 1.

11.172. Точки 1 и i неподвижны, а точка 0 переходит в ∞.

11.173. Точки $\frac{1}{2}$ и 2 неподвижны, а $\frac{5}{4}+\frac{3}{4}i$ переходит в ∞.

11.174. Доказать, что дробно-линейное преобразование $w=\frac{az+b}{cz+d}$ имеет две неподвижные точки. При каком условии эти точки совпадают? Когда бесконечно удаленная точка является неподвижной?

Точки z_1 и z_2 называются симметричными относительно прямой, если они лежат на перпендикуляре к этой прямой по разные стороны от нее и на равных расстояниях.

Точки z_1 и z_2 называются *симметричными относительно окружности*, если они лежат на одном луче, выходящем из центра этой окружности, по разные стороны от нее и так, что произведение расстояний от этих точек до центра равно квадрату радиуса.

Точки M и N, симметричные относительно прямой или окружности в плоскости (z), отображаются дробно-линейной функцией в точки M' и N', симметричные относительно образа этой прямой или окружности в плоскости (w).

11.175. Найти точки, симметричные с точкой $1+i$ относительно окружностей:

а) $|z|=1$; б)* $|z-i|=2$.

11.176. Для отображения $w=\frac{z-i}{z+i}$ найти образ точки, симметричной точке $1-i$ относительно:

а) прямой $y=x$; б) окружности $|z-1|=3$.

Пример 6. Найти отображение круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$ такое, чтобы точка $z=\alpha$ ($|\alpha|<1$) отображалась в центр круга $w=0$.

◀ Запишем дробно-линейное отображение в виде

$$w=g\,\frac{z-z_0}{z-z_1}.$$

Так как точка $z=\alpha$ переходит в точку $w=0$, то $z_0=\alpha$, а так как симметричной с точкой $w=0$ является точка $w=\infty$, то z_1 является симметричной с точкой $z=\alpha$ относительно окружности $|z|=1$, т. е. $z_1=\frac{1}{\bar\alpha}$. Поэтому

$$w=g\bar\alpha\frac{z-\alpha}{\bar\alpha z-1}.$$

Далее, точки окружности $|z|=1$ переходят в точки окружности $|w|=1$, а поэтому при $z=e^{i\varphi}$ имеем

$$1=|g\bar\alpha|\left|\frac{e^{i\varphi}-\alpha}{\bar\alpha e^{i\varphi}-1}\right|.$$

Но

$$\left|\frac{e^{i\varphi}-\alpha}{e^{i\varphi}\bar\alpha-1}\right|^2=\frac{(e^{i\varphi}-\alpha)(e^{-i\varphi}-\bar\alpha)}{(e^{i\varphi}\bar\alpha-1)(e^{-i\varphi}\alpha-1)}=\frac{1+|\alpha|^2-e^{i\varphi}\bar\alpha-e^{-i\varphi}\alpha}{|\alpha|^2+1-e^{i\varphi}\bar\alpha-e^{-i\varphi}\alpha}=1.$$

Следовательно, $|g\bar\alpha|=1$, т. е. $g\bar\alpha=e^{i\theta}$, и искомое отображение имеет вид

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z\bar\alpha-1}. \blacktriangleright \qquad (2)$$

Для отображения (2) единичного круга на себя найти параметры α и θ по заданным условиям:

11.177. $w(1/2)=0$, $\arg w'(1/2)=0$.

11.178. $w(0)=0$, $\arg w'(0)=\pi/2$.

11.179. $w(z_0)=0$, $\arg w'(z_0)=\pi/2$.

11.180. Доказать, что функция

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar\alpha},\quad \operatorname{Im}\alpha>0, \qquad (3)$$

осуществляет отображение верхней полуплоскости на единичный круг.

Определить параметры α и θ в формуле (3) по заданным условиям:

11.181. $w(i)=0$, $\arg w'(i)=-\pi/2$.

11.182. $w(2i)=0$, $\arg w'(2i)=\pi$.

11.183. $w(z_0)=0$, $\arg w'(z_0)=\pi/2$.

Найти образ E области D при заданном дробно-линейном отображении:

11.184. $D=\{z\,|\,\operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z>0\}$; $w=\frac{z-i}{z+i}$.

11.185*. $D=\left\{z\,|\,0<\arg z<\frac{\pi}{4}\right\}$; $w=\frac{z}{z-1}$.

11.186*. $D=\left\{z\,|\,1\leqslant|z|\leqslant 2,\ 0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$; $w=1+\frac{1}{z}$.

11.187. $D=\{z\,|\,|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$; $w=i\frac{1-z}{1+z}$.

11.188. $D=\{z\,|\,0<\operatorname{Re} z<1\}$; $w=\frac{z-1}{z-2}$.

11.189. D — двуугольник (круговая луночка), заключенный между окружностями $|z-1|=1$, $|z-i|=1$; $w=-\frac{z}{z-1-i}$.

11.190.** Найти область D в плоскости (z), которая при отображении $w=\frac{z}{1-z}$ преобразуется во внутренность круга $|w|<r$ плоскости (w).

3. Степенная функция. Отображение, осуществляемое степенной функцией $w=z^n$ ($n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$), является конформным в расширенной комплексной плоскости всюду, кроме точки $z=0$ ($w'|_{z=0}=nz^{n-1}|_{z=0}=0$). Угол $D=\left\{z\,\middle|\,\frac{2k\pi}{n}<\arg z<\frac{2(k+1)\pi}{n}\right\}$ при любом $k=0, 1, \ldots, n-1$ отображается степенной функцией взаимно однозначно на всю плоскость (w) с разрезом по положительной части действительной оси $\left(\text{причем лучу } \arg z=\frac{2k\pi}{n} \text{ соответствует верхний, а лучу } \arg z=\frac{2(k+1)\pi}{n} \text{ — нижний край разреза}\right)$. Обратная функция $w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}$, где $k=0, 1, \ldots, n-1$, $r=|z|$, $\varphi=\arg z$, является, как известно, многозначной. Ее однозначная ветвь (выделяемая заданием образа одной из точек) отображает плоскость (z) с разрезом по неотрицательной части действительной оси на соответствующий сектор

$$E=\left\{w\,\middle|\,\frac{2k\pi}{n}<\arg w<\frac{2(k+1)\pi}{n}\right\},$$

k — фиксировано.

Пример 7. Найти отображение внутренности двуугольника с вершинами z_1 и z_2, образованного окружностями C_1 и C_2 на единичный круг.

◀ Преобразование $w_1=-\frac{z-z_1}{z-z_2}$ отображает точку $z=\frac{z_1+z_2}{2}$ в точку $w_1=1$, точку $z=z_1$ — в нуль, а точку $z=z_2$ — в бесконечность. Таким образом, отрезок, соединяющий точки z_1 и z_2, отображается на положительную действительную полуось. Дуги окружностей, образующие двуугольник, отображаются в лучи $\arg w_1=\alpha\pi$ и $\arg w_1=-\beta\pi$. Следовательно, область D отображается на сектор $E_1=\{w_1\,|\,-\beta\pi<\arg w_1<\alpha\pi\}$ (ср. с задачей 11.189). Повернем этот сектор на угол $\beta\pi$, т. е. произведем преобразование $w_2=e^{i\beta\pi}w_1$, и возведем полученную функцию в степень $\frac{1}{\beta+\alpha}$:

$$w_3=(w_2)^{\frac{1}{\beta+\alpha}}.$$

Сектор отобразится в верхнюю полуплоскость. Функция

$$w_4=e^{i\theta}\frac{w_3-w_3^0}{w_3-\bar w_3^0}$$

осуществляет отображение полуплоскости на единичный круг. Величины w_3^0 и θ определяются дополнительным заданием отображения точки z_0 в точку $w=0$ и условием $\arg w'(z_0)=\gamma$. Окончательно, $w=w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$ (рис. 95). ▶

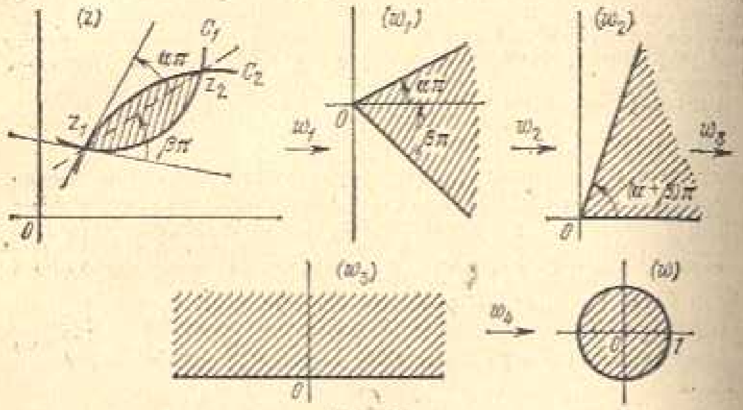

Рис. 95

Найти функцию, отображающую заданную область D плоскости (z) на верхнюю полуплоскость (в ответах указана одна из функций, осуществляющих указанное отображение, причем если функция многозначна, то имеется в виду одна из ее однозначных ветвей):

11.191. $D=\{z \mid |z|<1,\ |z-1|<1\}$.

11.192. $D=\{z \mid -\pi/4<\arg z<\pi/2\}$.

11.193. $D=\{z \mid |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$.

11.194. $D=\{z \mid |z|>1,\ \operatorname{Im} z>0\}$.

11.195. $D=\{z \mid |z|<2,\ 0<\arg z<\pi/4\}$.

11.196. $D=\{z \mid |z|>2,\ 0<\arg z<3\pi/2\}$.

11.197. $D=\{z \mid |z|<2,\ \operatorname{Im} z>1\}$.

11.198. $D=\{z \mid |z|<1,\ |z+i|<1\}$.

11.199. $D=\{z \mid |z|<1,\ |z+i|>1\}$.

11.200. $D=\{z \mid |z|>1,\ |z+i|<1\}$.

11.201. D — плоскость (z), разрезанная по отрезку $[-i, i]$.

11.202. D — плоскость (z), разрезанная по отрезку, соединяющему точки $1+i$ и $2+2i$.

11.203. D — плоскость с разрезом по лучам $(-\infty, -R]$ и $[R, +\infty)$, $R>0$.

11.204. D — полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ с разрезом по отрезку, соединяющему точки 0 и ih $(h>0)$.

4. Функция Жуковского. Имеем $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $w'=\frac{1}{2}\frac{z^2-1}{z^2}$. Следовательно, функция Жуковского[1]) конформна в расширенной плоскости всюду, за исключением точек $z_{1,2}=\pm 1$ и $z_3=0$. Она осуществляет отображение как внешности, так и внутренности единичного круга плоскости (z) на плоскость (w) с разрезом по отрезку $[-1, 1]$. Полная плоскость (z) отображается на двулистную риманову поверхность, склеенную крест-накрест по разрезам $[-1, 1]$.

Обратная функция

$$z=w+\sqrt{w^2-1}$$

двузначна, причем каждая ветвь осуществляет отображение плоскости (w) с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ на внутренность или на внешность единичного круга в плоскости (z).

Пример 8. Найти образ полярной сетки $\rho=\text{const}$ и $\varphi=\text{const}$ при преобразовании плоскости (z) с помощью функции Жуковского.

◀ Полагая $z=\rho e^{i\varphi}$, имеем

$$w=u+iv=\frac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi}+\frac{1}{\rho}e^{-i\varphi}\right)=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi+i\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi.$$

Следовательно,

$$u=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi, \quad v=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi,$$

и для $\rho\neq 1$ имеем

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)^2}=1 \qquad (4)$$

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi}=1. \qquad (5)$$

Из этих равенств заключаем, что окружности $|z|=\rho\neq 1$ отображаются в эллипсы плоскости (w) с полуосями $a=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)$ и $b=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)$ при $\rho>1$ или $b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right)$ при $\rho<1$. Лучи $\varphi=\text{const}$ в плоскости (z) преобразуются в плоскости (w) в гиперболы с полуосями $a=|\cos\varphi|$ и $b=|\sin\varphi|$.

Заметим, что фокусные расстояния $c=\sqrt{a^2-b^2}$ эллипсов (4) и $c_1=\sqrt{a^2+b^2}$ гипербол (5) равны 1, т. е. (4) и (5) — семейства софокусных эллипсов и гипербол. ▶

Пример 9. Найти отображение плоскости (z) с разрезами по отрезку, соединяющему точки 0 и $4i$, и по отрезку, соединяющему точки $2i$ и $2+2i$, на внутренность единичного круга $|w|<1$.

[1]) Конформное отображение, осуществляемое функцией $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, было использовано впервые Н. Е. Жуковским в качестве метода получения одного класса аэродинамических профилей, названных профилями Жуковского. Профили Жуковского отображаются на круг, для которого можно легко решить задачу обтекания, а это дает возможность исследовать обтекание крыла самолета.

◀ Искомое отображение w находим в виде композиции пяти отображений. Функция $w_1 = z - 2i$ переводит точку $z = 2i$ в начало координат, а функция $w_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} w_1$ осуществляет поворот плоскости (w_1) на угол $\pi/2$. Точка $z = 4i$ переходит в результате этих отображений в точку $w_2 = -2$, точка $z = 2i$ — в точку $w_2 = 0$, точка $z = 2 + 2i$ — в точку $w_2 = 2i$, а точка $z = 0$ — в точку $w_2 = 2$. Далее, в результате отображений $w_3 = w_2^2$ и $w_4 = w_3/4$ разрез отображается в отрезок $[-1, 1]$ плоскости (w_4), и, наконец,

$$w_5 = w_4 + \sqrt{w_4^2 - 1},$$

отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на внутренность единичного круга, причем выбирается та ветвь этой функции, которая при $w_4 = \infty$ обращается в нуль. Итак, $w = w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$ (рис. 96). ▶

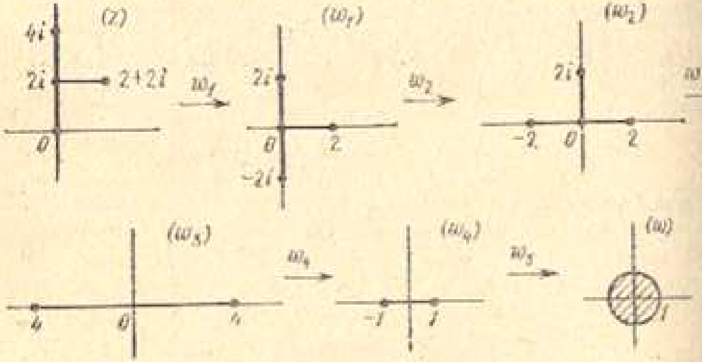

Рис. 96

В задачах 11.205—11.207 найти образы заданных областей при отображении $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

11.205. Внутренности круга $|z| < R$ при $R < 1$ и внешности круга $|z| > R$ при $R > 1$.

11.206. Внутренности круга $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[1/2, 1]$.

11.207. Внутренности круга $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[-1/2, 1]$.

11.208*. Найти отображение круга $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[1/3, 1]$ на круг $|w| < 1$.

11.209*. Найти отображение области $D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0, |z| > R\}$ (верхняя полуплоскость с выкинутым полукругом) на верхнюю полуплоскость.

11.210*. Отобразить внешность эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ на внешность единичного круга.

5. Показательная функция. Функция $w = e^z$ однолистна в любой полосе шириной менее 2π, параллельной действительной оси. Она отображает полосу $-\infty < x < +\infty$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$ в полную плоскость (w) с разрезом по действительной отрицательной полуоси. Вся плоскость (z) отображается на бесконечнолистную риманову поверхность. Обратная функция $z = \operatorname{Ln} w = \ln w + 2n\pi i$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, однозначна на этой римановой поверхности, а ее главное значение $\ln w = \ln |w| + i \arg w$ определяет конформное отображение всей плоскости (w) с разрезом $(-\infty, 0]$ на полосу $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ шириной 2π, параллельную действительной оси.

Пример 10. Найти отображение полосы шириной H, $0 < \operatorname{Re} z < H$, параллельной мнимой оси, на единичный круг плоскости (w).

◀ Искомое решение получим, например, с помощью композиции отображений:

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} z, \quad w_2 = \frac{\pi}{H} w_1, \quad w_3 = e^{w_2}, \quad w_4 = e^{i\theta} \frac{w_3 - w_3^0}{w_3 - \overline{w}_3^0}.$$

При последовательном выполнении этих отображений заданная полоса преобразуется в области, показанные на рис. 97. ▶

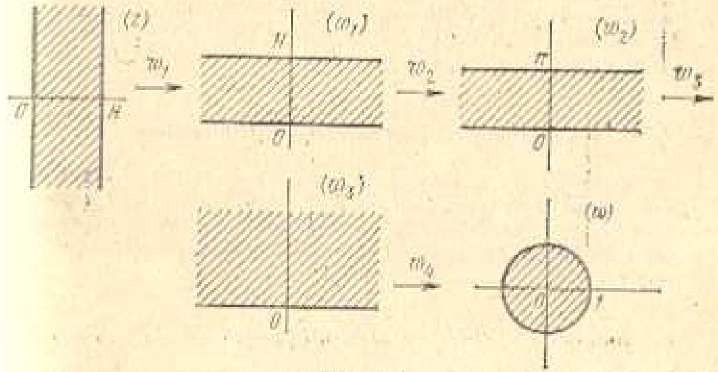

Рис. 97

Найти образ E области D при отображении $w = e^z$:

11.211. $D = \{z \mid -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}$.

11.212. $D = \{z \mid |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$.

11.213. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.

11.214. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.

11.215. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

11.216. Найти образы прямых $x = C$ и $y = C$ при отображении $w = e^z$.

Найти образы следующих областей при отображении $w = \ln z$, $w(i) = \frac{\pi i}{2}$:

11.217. $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. **11.218.** $\{z \mid |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

11.219. $\{z \mid |z| < 1,\ z \notin [0,\ 1]\}$.

11.220. $\{z \mid z \notin [-\infty,\ -1] \cup [0,\ +\infty]\}$.

6. Тригонометрические и гиперболические функции. Функция $w = \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ однолистна в полуполосе $-\pi < x \leqslant \pi,\ y > 0$ и отображает эту полуполосу на плоскость (w) с разрезом $(-\infty,\ 1]$. Риманова поверхность этой функции более сложная, чем у предыдущих, так как склеивание листов происходит отдельно по лучу $(-\infty,\ -1)$ и по отрезку $[-1,\ 1]$.

Функция $w = \sin z$ сводится к предыдущей с помощью соотношения $\sin z = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)$. К $\sin z$ и $\cos z$ сводятся и гиперболические функции: $\operatorname{sh} z = -i \sin iz$, $\operatorname{ch} z = \cos iz$.

11.221.** Найти образ E полуполосы $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Re} z < \pi,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $w = \cos z$.

11.222. Найти образы прямых $x = C$, $y = C$ при отображении $w = \operatorname{ch} z$.

11.223. Найти образ E прямоугольника $D = \{z \mid -\pi < \operatorname{Re} z < \pi,\ -h < \operatorname{Im} z < h,\ h > 0\}$ при отображении $w = \cos z$.

§ 4. Интеграл от функции комплексной переменной

1. Интеграл по кривой и его вычисление. Пусть l — дуга направленной кусочно гладкой кривой в плоскости (z), точки $z_k \in l$, $k = 0, 1, \ldots, n$, разбивают дугу l на частичные дуги, на каждой из которых выбрано по одной точке ξ_k, $k = 1, \ldots, n$. По определению полагаем

$$\int_l f(z)\, dz = \lim_{\max |\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta z_k \tag{1}$$

при условии, что предел в правой части (1) существует и не зависит ни от способа разбиения дуги l на частичные дуги, ни от выбора точек ξ_k. Если функция $f(z)$ непрерывна на l, то интеграл (1) существует.

Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то вычисление интеграла (1) сводится к вычислению двух криволинейных интегралов 2-го рода

$$\int_l f(z)\, dz = \int_l u(x, y)\, dx - v(x, y)\, dy + i \int_l v(x, y)\, dx + u(x, y)\, dy. \tag{2}$$

Пример 1. Пользуясь определением (1), вычислить $\int_l \operatorname{Re} z\, dz$, где l — радиус-вектор точки $1 + i$.

◀ Разбиваем радиус-вектор точки $1 + i$ на n равных частей, т. е. полагаем

$$z_k = \frac{k}{n} + i\frac{k}{n}, \quad \Delta z_k = \frac{1}{n}(1 + i), \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

и пусть $\xi_k = z_k$. Тогда интегральная сумма запишется в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k\, \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1+i}{n} = \frac{1+i}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1+i}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_l \operatorname{Re} z\, dz = \lim_{n \to \infty} \frac{(i+1)(n+1)}{2n} = \frac{1+i}{2}. \ ▶$$

Пример 2. Используя представление интеграла в форме (2) и правила вычисления криволинейных интегралов 2-го рода, вычислить интеграл $\int_l |z|\, \bar{z}\, dz$, где l — верхняя полуокружность $|z| = 1$ с обходом против часовой стрелки.

◀ Имеем

$$\int_l |z|\, \bar{z}\, dz = \int_l \sqrt{x^2 + y^2}\,(x\, dx + y\, dy) + i \int_l \sqrt{x^2 + y^2}\,(-y\, dx + x\, dy).$$

Переходя к параметрическому уравнению кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, и учитывая, что $\sqrt{x^2 + y^2} = |z| = 1$ в точках кривой, получаем

$$\int_l |z|\, \bar{z}\, dz = \int_0^{\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t)\, dt + i \int_0^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \pi i. \ ▶$$

Если дуга l задана параметрическим уравнением $z = z(t)$, причем начальная и конечная точки дуги соответствуют значениям параметра $t = t_0$ и $t = t_1$ соответственно, то

$$\int_l f(z)\, dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\, z'(t)\, dt. \tag{3}$$

Пример 3. Используя формулу (3), вычислить интеграл $\int_l (z + \bar{z})\, dz$, где l — дуга окружности $|z| = 1$, $\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant 3\pi/2$.

◀ Положим $z(t) = e^{it}$, $\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$. Тогда $z'(t) = ie^{it}$ и, используя формулу (3), находим:

$$\int_l (z + \bar{z})\, dz = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (e^{it} + e^{-it})\, ie^{it}\, dt = i\left(\frac{1}{2i} e^{2it} + t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2} = \pi i. \ ▶$$

Непосредственным суммированием вычислить следующие интегралы:

11.224. $\int_l \operatorname{Im} z\, dz$, где l — радиус-вектор точки $2 - i$.

11.225. $\int_l |z|\, dz$, где l — радиус-вектор точки $-2 - 3i$.

11.226. Доказать, что при изменении направления пути интегрирования интеграл изменит знак, т. е.

$$\int_{l^+} f(z)\,dz = -\int_{l^-} f(z)\,dz.$$

11.227. Доказать, что если a_1 и a_2 — постоянные, то

$$\int_l (a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z))\,dz = a_1 \int_l f_1(z)\,dz + a_2 \int_l f_2(z)\,dz.$$

11.228. Доказать, что если кривая интегрирования l является объединением кривых l_1 и l_2, то

$$\int_l f(z)\,dz = \int_{l_1} f(z)\,dz + \int_{l_2} f(z)\,dz.$$

11.229*. Доказать, что имеет место оценка

$$\left|\int_l f(z)\,dz\right| \leqslant \int_l |f(z)|\,ds,$$

где ds — дифференциал дуги.

Вычислить интегралы по заданным контурам:

11.230. $\int_l (2z+1)\bar{z}\,dz$, $l = \{z \mid |z| = 1,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi\}$.

11.231. $\int_l \operatorname{Im} z\,dz$, $l = \{(x, y) \mid y = 2x^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

11.232. $\int_l (iz^2 - 2\bar{z})\,dz$, $l = \{z \mid |z| = 2,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2\}$.

11.233. $\int_l \operatorname{Re}(z + z^2)\,dz$, $l = \{(x, y) \mid y = 2x^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

11.234. $\int_l (\bar{z}^2 - z)\,dz$, $l = \{z \mid |z| = 1,\ \pi \leqslant \arg z \leqslant 2\pi\}$.

11.235. $\int_l \bar{z}e^{z}\,dz$, l — отрезок прямой от точки $z_0 = 1$ до точки $z_1 = i$.

11.236. $\int_l e^{\bar{z}}\,dz$, l — отрезок прямой от точки $z_0 = \pi$ до точки $z_1 = -i\pi$.

11.237. $\int_l z \operatorname{Im}(z^2)\,dz$, $l = \{z \mid \operatorname{Re} z = 1,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant 10\}$.

11.238. $\int_l \operatorname{Re}(\cos z) \sin z\,dz$, $l = \{z \mid \operatorname{Re} z = \pi/3,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2\}$.

11.239. $\int_l \cos \bar{z}\,dz$, l — отрезок прямой от точки $z_0 = \pi$ до точки $z_1 = \frac{\pi}{2} + i$.

11.240. $\int_l \operatorname{sh} \bar{z}\,dz$, l — отрезок прямой от точки $z_0 = \ln 2$ до точки $z_1 = \ln 10 + \pi i \ln 5$.

11.241. $\int_l \operatorname{Im} z^2 \operatorname{Re} z^3\,dz$, $l = \{(x, y) \mid y = 3x^3,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

11.242. $\int_l \frac{z}{\bar{z}}\,dz$, $l = \{z \mid |z| = 1,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2\}$.

Пусть в области D задана многозначная функция $w = f(z)$. Однозначная функция $w = \varphi(z)$, аналитическая в области D, называется *однозначной ветвью* функции $f(z)$, если для любой точки $z_0 \in D$ значение $\varphi(z_0)$ принадлежит множеству значений функции $f(z)$ в точке $z = z_0$, т. е. $\varphi(z_0) \in \{f(z_0)\}$. Многозначная в области D функция может иметь как конечное число однозначных ветвей (например, $w = \sqrt[n]{z}$), так и бесконечное (например, $w = \operatorname{Ln} z$).

Точка z комплексной плоскости, обладающая тем свойством, что обход вокруг нее в достаточно малой окрестности влечет за собой переход от одной ветви многозначной функции к другой, называется *точкой ветвления (разветвления)* рассматриваемой многозначной функции. Так, точками ветвления многозначной функции $w = \sqrt[n]{z}$ являются точки $z = 0$ и $z = \infty$. В каждой из своих точек ветвления многозначная функция принимает только одно значение, т. е. различные однозначные ветви функции в этих точках совпадают.

При интегрировании многозначной функции необходимо выделять ее однозначную ветвь. Во всех задачах ниже это достигается заданием значения многозначной функции в некоторой точке контура интегрирования.

Вычислить интегралы по заданным контурам:

11.243. $\int_l \frac{dz}{\sqrt[3]{z}}$, $l = \{z \mid |z| = 1,\ -\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2\}$, $\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

◀ Функция $\sqrt[3]{z}$ является многозначной:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}\, e^{\frac{i}{3}(\varphi + 2k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2,$$

где $\varphi = \arg z$. Условию $\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ удовлетворяет та однозначная ветвь этой функции, для которой $k = 1$. Действительно, при $k=1$ (и так как $\arg 1=0$)

$$\sqrt[3]{1}=e^{\frac{i}{3}(0+2\pi)}=e^{\frac{2\pi i}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Полагая теперь $z(\varphi)=e^{i\varphi}$ $(-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$ на кривой l, находим

$$\sqrt[3]{z}=e^{\frac{i}{3}(\varphi+2\pi)},\quad z'(\varphi)=ie^{i\varphi},$$

и, следовательно,

$$\int\limits_l\frac{dz}{\sqrt[3]{z}}=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{ie^{i\varphi}\,d\varphi}{e^{\frac{i}{3}(\varphi+2\pi)}}=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i\left(\frac{2\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}\,i\,d\varphi=$$

$$=\frac{3}{2}e^{i\left(\frac{2\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{3}{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\pi}\right)=\frac{9}{4}-i\frac{3\sqrt{3}}{4}. ▶$$

11.244. $\int\limits_l\frac{dz}{\sqrt[3]{z}},\ l=\{z\mid |z|=1,\ 0\leqslant\arg z\leqslant\pi\},\ \sqrt[3]{1}=1.$

11.245. $\int\limits_l\sqrt{z}\,dz,\quad l=\{z\mid |z|=1,\quad \pi/2\leqslant\arg z\leqslant\pi\},$ $\sqrt{1}=-1.$

11.246. $\int\limits_l\frac{\mathrm{Ln}^2 z}{z}\,dz,\quad l=\{z\mid |z|=1,\quad 0\leqslant\arg z\leqslant\pi/2\},$ $\mathrm{Ln}\,1=2\pi i.$

11.247. $\int\limits_l\mathrm{Ln}\,z\,dz,\ l=\{z\mid |z|=1\},\ \mathrm{Ln}\,i=\frac{\pi}{2}i.$

11.248. $\int\limits_l z^n\,\mathrm{Ln}\,z\,dz,\ n\in\mathbb{N},\ l=\{z\mid |z|=1\},\ \mathrm{Ln}(-1)=\pi i.$

2. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, ограниченной контуром Γ, и γ — замкнутый контур в D, то

$$\oint\limits_\gamma f(\eta)\,d\eta=0. \tag{4}$$

Если, дополнительно, функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}=D\cup\Gamma$, то

$$\oint\limits_\Gamma f(\eta)\,d\eta=0$$

(т е о р е м а К о ш и).

Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области D, ограниченной контуром Γ и внутренними по отношению к нему контурами $\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_k$, и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}=D\cup\Gamma^+\cup\gamma_1^-\cup\ldots\cup\gamma_k^-$, где знаки в верхних индексах означают направления обходов (рис. 98), то

$$\oint\limits_{\Gamma^+\cup\bigcup\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu^-}f(\eta)\,d\eta=0 \tag{5}$$

(т е о р е м а К о ш и д л я м н о г о с в я з н о й о б л а с т и).

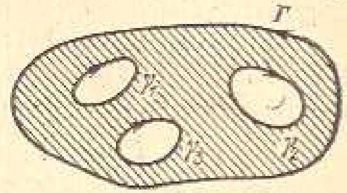

Рис. 98

Если функция $f(z)$ определена и непрерывна в односвязной области D и такова, что для любого замкнутого контура $\gamma\subset D$

$$\oint\limits_\gamma f(\eta)\,d\eta=0,$$

то при фиксированном $z_0\in D$ функция

$$\Phi(z)=\int\limits_{z_0}^{z}f(\eta)\,d\eta$$

является аналитической в области D функцией, для которой $\Phi'(z)=f(z)$.

Функция $\Phi(z)$ называется первообразной или неопределенным интегралом от $f(z)$, причем если $F(z)$ — одна из первообразных для $f(z)$, то

$$\int\limits_{z_1}^{z_2}f(\eta)\,d\eta=F(z_2)-F(z_1).$$

Если $f(z)$ аналитична в области D, $z_0\in D$ и $\gamma\subset D$ — контур, охватывающий точку z_0, то справедлива **и н т е г р а л ь н а я ф о р м у л а К о ш и**

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}\,d\eta. \tag{6}$$

При этом функция $f(z)$ имеет всюду в D производные любого порядка, для которых справедливы формулы

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\oint\limits_\gamma\frac{f(\eta)}{(\eta-z)^{k+1}}\,d\eta,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{7}$$

П р и м е р 4. Доказать, что если $f(z)$ — аналитическая и ограниченная в выпуклой области D функция, то для любых двух точек z_1 и z_2 из этой области имеет место оценка

$$\left|\int\limits_{z_1}^{z_2}f(\eta)\,d\eta\right|\leqslant\max_{z\in D}|f(z)|\,|z_2-z_1|.$$

◀ Из выпуклости области следует, что если $z_1\in D$, $z_2\in D$, то и отрезок, соединяющий эти точки, также принадлежит области D.

Из теоремы Коши следует, что в качестве пути интегрирования можем взять именно этот отрезок, а потому, применяя оценку задачи 11.229, имеем

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} f(\eta)\,d\eta\right| \leqslant \max_{z\in D}|f(z)|\cdot\left|\int_{z_1}^{z_2} ds\right| = |z_2-z_1|\max_{z\in D}|f(z)|. \blacktriangleright$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$\int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta^2} = F(z)-F(0),$$

если путь интегрирования не охватывает ни одну из точек $z_{1,2}=\pm i$.

◀ Так как подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ является аналитической всюду, кроме точек $z_{1,2}=\pm i$, то интеграл $F(z)$ имеет смысл во всех точках, кроме $z=\pm i$, и при условии, что путь интегрирования не проходит через эти точки. Следовательно, если путь интегрирования не охватывает ни одну из точек $z_{1,2}=\pm i$, то в качестве одной из первообразных для функции $\dfrac{1}{z^2+1}$ можно взять однозначную функцию $F(z)=\operatorname{arctg} z$, и, учитывая, что $\operatorname{arctg} 0=0$, имеем

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta^2}. \blacktriangleright$$

Пример 6. Вычислить интеграл

$$I=\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin\frac{iz\pi}{2}}{z^2+1}\,dz.$$

◀ Запишем интеграл в виде

$$I=\oint_{|z-i|=1} \frac{\dfrac{\sin\frac{iz\pi}{2}}{z+i}}{z-i}\,dz$$

и, используя формулу Коши (6), находим

$$I=2\pi i\,\frac{\sin\frac{iz\pi}{2}}{z+i}\bigg|_{z=i} = 2\pi i\,\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2i} = -\pi. \blacktriangleright$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$I=\oint_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz.$$

◀ Так как внутри контура интегрирования знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках $z_1=0$ и $z_2=1$, то рассмотрим многосвязную область D, ограниченную окружностью

$\Gamma=\{z\,|\,|z-2|=3\}$ и внутренними контурами $\gamma_1=\{z\,|\,|z|=\rho\}$ и $\gamma_2=\{z\,|\,|z-1|=\rho\}$ $(0<\rho<1/2)$. Тогда в этой области D функция $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$ является аналитической, и по формуле (5) можем записать:

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_1^-} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2^-} f(z)\,dz = 0,$$

откуда следует, что

$$I=\oint_{\Gamma^+}\frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz = \oint_{\gamma_1^+}\frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz + \oint_{\gamma_2^+}\frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz.$$

Применяя теперь соответственно формулы (7) и (6), находим

$$\oint_{\gamma_1^+}\frac{\dfrac{e^z}{z-1}}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)''\bigg|_{z=0} = \pi i\,\frac{e^z(z^2-4z+5)}{(z-1)^3}\bigg|_{z=0} = -5\pi i$$

и

$$\oint_{\gamma_2^+}\frac{e^z/z^3}{z-1}\,dz = 2\pi i\,\frac{e^z}{z^3}\bigg|_{z=1} = 2\pi e i.$$

Таким образом, $I=\pi i(2e-5)$. ▶

Вычислить интегралы:

11.249. $\int_l e^z\,dz$, $l=\{(x, y)\,|\,y=x^3,\ 1\leqslant x\leqslant 2\}$.

11.250. $\int_l \sin z\,dz$, $l=\{z\,|\,z=t^2+it,\ 1/2\leqslant t\leqslant 3/2\}$.

11.251. $\int_l z^2\cos z\,dz$, l — отрезок прямой от точки $z_0=i$ до точки $z_1=1$.

11.252. $\int_l \operatorname{tg} z\,dz$, $l=\{(x, y)\,|\,x=y^2,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

11.253*. $\int_l (z-z_0)^n\,dz$, n — целое число, $l=\{z\,|\,|z-z_0|=R\}$.

11.254. $\int_l (z-z_0)^n\,dz$, n — целое число, $l=\{z\,|\,|z-z_0|=R,\ \operatorname{Im}(z-z_0)>0\}$.

11.255. Вычислить интеграл $\int_l (z-1)\cos z\,dz$ по произвольной кривой l, соединяющей точки $z_0=\pi$ и $z_1=\dfrac{3\pi}{2}i$.

11.256*. Какие значения принимает интеграл $\int\limits_{l} \frac{dz}{z-\frac{1}{2}}$, если в качестве l брать произвольные кривые, соединяющие точки $z_0=1$ и $z_1=\frac{1+i}{2}$?

Вычислить интегралы (обход контуров — против часовой стрелки):

11.257. а) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i}\,dz$; б) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2}{z-2i}\,dz$.

11.258. а) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{2z}}{z-\pi i}\,dz$; б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z-\pi i}\,dz$.

11.259. а) $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{dz}{1+z^2}$; б) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{1+z^2}$; в) $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{dz}{1+z^2}$.

11.260. а) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1}\,dz$; б) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1}\,dz$.

11.261. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+2z}$. **11.262.** $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz$.

11.263. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2-2z}\,dz$.

11.264. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z^2-z}\,dz$.

11.265. $\oint\limits_{C} \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^2}$, где:

а) $C=\{z \mid |z-1|=1\}$; б) $C=\{z \mid |z+1|=1\}$;
в) $C=\{z \mid |z|=R,\ R\neq 1\}$.

11.266. $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)^3}\,dz$. **11.267.** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3}\,dz$.

11.268. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z-1)^2(z-3)}\,dz$.

11.269. $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3-4z^2}\,dz$.

11.270. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}\,dz$. **11.271.** $\oint\limits_{|z-2i|=1} \frac{e^{1/z}}{(z^2+4)^2}\,dz$.

11.272. Доказать теорему о среднем: если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z-z_0|<R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z-z_0|\leqslant R$, то значение функции в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на окружности, т. е.

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})\,d\theta=\frac{1}{2\pi R}\oint\limits_{|\eta-z_0|=R} f(\eta)\,ds,$$

где ds — дифференциал дуги.

11.273*. Известно, что если $f(z)\not\equiv \mathrm{const}$ — аналитическая в области D и непрерывная в замкнутой области $\overline{D}=D\cup L$ функция, то $\max\limits_{z\in\overline{D}}|f(z)|$ достигается только на границе области (принцип максимума модуля). Доказать, что если, кроме того, $\forall z\in\overline{D}\ f(z)\neq 0$, то и $\min\limits_{z\in\overline{D}}|f(z)|$ достигается также на границе.

11.274. Используя формулу (6) для $f'(z)$, доказать теорему Лиувилля: если $f(z)$ — аналитическая и ограниченная во всей плоскости (z) функция, то $f(z)\equiv \mathrm{const}$.