$x; \quad y(0)=1, \quad y(1)=0, \quad [0, \ 1],$

$y(0)=0, \quad y(2,2)=1, \quad [0, \ 2,2],$

$3,125y=4x, \quad y(0)=1, \quad y(1)=$

$y(1)-2y'(1)=0, \quad y(2)=4,5,$

дпрограмму решения линейной
уравнений, полученную в задаче
тране программу решения одной

Глава 10

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ 1. Скалярные и векторные поля. Градиент

1. Геометрические характеристики скалярных и векторных полей. Пусть D — область в пространстве двух, трех или n измерений. Говорят, что в области D задано *скалярное поле*, если в D задана скалярная функция точки $u(P)=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)=u(\boldsymbol{r})$, называемая функцией поля ($\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$). Если каждой точке $P \in D$ поставлен в соответствие вектор $\boldsymbol{a}(P)=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, то говорят, что в области D задано *векторное поле*, определяемое векторной функцией $\boldsymbol{a}(P)=\boldsymbol{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$.

Простейшими геометрическими характеристиками скалярных полей являются *линии уровня* $u(x, y)=C$ в пространстве двух измерений, *поверхности уровня*, или *эквипотенциальные поверхности*, $u(x, y, z)=C$ в пространстве трех измерений и *гиперповерхности уровня* $u(x_1, \ldots, x_n)=C$ в пространстве $n>3$ измерений. Простейшими геометрическими характеристиками векторных полей являются векторные линии и векторные трубки. *Векторной линией* называется линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление соответствующего ей вектора поля. Векторные линии для векторного поля $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)}=\frac{dy}{a_y(x, y, z)}=\frac{dz}{a_z(x, y, z)}$$

(аналогично для плоских и многомерных полей). *Векторной трубкой* называется поверхность, образованная векторными линиями, проходящими через точки некоторой лежащей в поле замкнутой кривой, не совпадающей (даже частично) с какой-либо векторной линией.

Определить вид линий или поверхностей (гиперповерхностей) уровня следующих скалярных полей:

10.1. $u=y^2+x$. 10.2. $u=xy$.

10.3. $u=y/x$. 10.4. $u=x+y+z$.

10.5. $u=x^2+y^2-z^2$. 10.6. $u=x^2+y^2-z$.

10.7. $u=x_1+x_2+x_3+x_4$. 10.8. $u=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

Найти векторные линии следующих полей:

10.9. $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$. 10.10. $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$.

10.11. $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$. 10.12. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

10.13. $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}]$ ($\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор).

◀ Пусть $c = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Тогда

$$a = [r, c] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = (cy - bz)\,\mathbf{i} + (az - cx)\,\mathbf{j} + (bx - ay)\,\mathbf{k}.$$

Дифференциальные уравнения векторных линий поля $\boldsymbol{a}$ имеют следующий вид:

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay}.$$

Умножая числитель и знаменатель первой дроби на x, второй — на y и третьей на z, находим

$$\frac{x\,dx}{cxy - bxz} = \frac{y\,dy}{ayz - cxy} = \frac{z\,dz}{bxz - ayz}.$$

Складывая почленно и используя свойство пропорции, окончательно выводим:

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{0}.$$

Следовательно,

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

или

$$d(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2.$$

Аналогично, умножая числитель и знаменатель первой дроби на a, второй на b, третьей на c и складывая почленно, находим

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay} = \frac{a\,dx + b\,dy + c\,dz}{0}.$$

Следовательно,

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

или

$$ax + by + cz = C_2.$$

Таким образом, уравнения векторных линий имеют вид:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2 \quad (C_1 \geq 0), \\ ax + by + cz = C_2. \end{cases}$$

Векторные линии поля $\boldsymbol{a}$ представляют собой окружности, являющиеся сечениями сфер $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ плоскостями $ax + by + cz = C_2$, перпендикулярными вектору c. ▶

10.14. $\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{i}}{x} + \frac{\mathbf{j}}{y} + \frac{\mathbf{k}}{z}$.

10.15. $\boldsymbol{a} = (y - z)\,\mathbf{i} + (z - x)\,\mathbf{j} + (x - y)\,\mathbf{k}$.

10.16. $\boldsymbol{a} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_4 e_4$.

10.17. Найти векторную линию поля $\boldsymbol{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + b\mathbf{k}$, проходящую через точку $P(1, 0, 0)$.

10.18. Найти векторную линию поля $\boldsymbol{a} = x^2\mathbf{i} - y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, проходящую через точку $P(1/2, -1/2, 1)$.

10.19. Определить вид векторных трубок:

а) в задаче 10.12; б) в задаче 10.15.

2. Производная по направлению и градиент скалярного поля. Пусть $\boldsymbol{s} = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \cos\beta \cdot \mathbf{j} + \cos\gamma \cdot \mathbf{k}$ — единичный вектор данного направления s, $r_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ — радиус-вектор точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$. *Производная* скалярного поля $u(P)$ в точке P_0 *по направлению* s, обозначаемая через $\frac{\partial u}{\partial s}$, определяется соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\tau \to 0} \frac{u(r_0 + \tau s) - u(r_0)}{\tau}$$

и характеризует скорость изменения функции $u(P)$ в направлении s.

Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ вычисляется по формуле

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{r = r_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{r = r_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{r = r_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{r = r_0} \cos\gamma. \quad (1)$$

Градиентом скалярного поля $u(P)$, обозначаемым символом $\operatorname{grad} u$, называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные функции $u(P)$, т. е.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}. \quad (2)$$

Аналогично определяется производная по направлению и градиент для n-мерных скалярных полей.

Исходя из выражения производной по направлению (1) и определения градиента (2), доказать следующие свойства градиента.

10.20. Производная поля по направлению s равна скалярному произведению градиента поля на единичный вектор данного направления, т. е. равна проекции градиента на данное направление

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\operatorname{grad} u, \boldsymbol{s}) = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi,$$

где φ — угол между градиентом и вектором $\boldsymbol{s}$.

10.21. Направление градиента есть направление наибыстрейшего возрастания функции поля.

10.22. В каждой точке поля градиент направлен по нормали к соответствующей поверхности уровня в сторону возрастания потенциала поля, т. е.

$$|\operatorname{grad} u| = \frac{\partial u}{\partial n},$$

где n — направление нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции поля.

10.23. Пусть $u=u(x, y, z)$ и $v=v(x, y, z)$ — дифференцируемые функции, c — постоянная. Доказать следующие соотношения:

а) $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v$;

б) $\operatorname{grad}(c+u)=\operatorname{grad}u$;

в) $\operatorname{grad}(cu)=c\operatorname{grad}u$;

г) $\operatorname{grad}(uv)=v\operatorname{grad}u+u\operatorname{grad}v$ (см. пример 4 § 3);

д) $\operatorname{grad}(u^n)=nu^{n-1}\operatorname{grad}u$;

е) $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}v}{v^2}$, $v\neq 0$.

Найти градиенты следующих скалярных полей:

10.24. $u=|\mathbf{r}|$. **10.25.** $u=\ln|\mathbf{r}|$.

10.26. $u=(\mathbf{a}, \mathbf{r})$; $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

10.27. $u=(\mathbf{a}, \mathbf{r})(\mathbf{b}, \mathbf{r})$; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — постоянные векторы.

10.28. $u=|[\mathbf{a}, \mathbf{r}]|^2$; $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

Пусть $r=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Показать, что:

10.29. $(\operatorname{grad}u(r), \mathbf{r})=u'(r)r$.

10.30. $[\operatorname{grad}u(r), \mathbf{r}]=\mathbf{0}$.

Найти производные от следующих полей в заданных точках по заданному направлению:

10.31. $u=x^2+\frac{1}{2}y^2$ в точке $P_0(2, -1)$ по направлению вектора $\overline{P_0P_1}$, где $P_1(6, 2)$.

10.32. $u=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+z$ в точке $P_0(2, 1, 1)$ по направлению прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{2}$ в сторону возрастания поля.

10.33. $u=x_1^2+x_2^2-x_3^2+x_4^2$ в точке $P_0(1, 3, 2, -1)$ по направлению вектора $\mathbf{a}=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_4$.

10.34. Найти производную скалярного поля $u=1/|\mathbf{r}|$ по направлению его градиента.

10.35. Найти производную скалярного поля $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ в точке $P(a, b, c)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

10.36. Найти угол между градиентами поля $u=x^2+2y^2-z^2$ в точках $P_1(2, 3, -1)$ и $P_2(1, -1, 2)$.

10.37. Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания поля $u=xyz$ в точке $P_0(1, 2, 2)$.

10.38. Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня поля $u=x^3+2xy-4yz$ в точке $P_0(1, 1, -1)$, направленный в сторону возрастания поля.

10.39. Найти стационарные точки поля $u=2x^2-4xy+y^2-2yz+6z$.

Убедиться в ортогональности линий уровня полей:

10.40. $u=x^2-y^2$, $v=xy$.

10.41. $u=2x^2+y^2$, $v=y^2/x$.

Убедиться в ортогональности поверхностей уровня следующих полей:

10.42. $u=x^2+y^2-z^2$, $v=xz+yz$.

10.43. $u=x^2+y^2-2z^2$, $v=xyz$.

10.44. $u=x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2$, $v=x_1x_3+x_2x_4$, $w=x_1x_4-x_2x_3$.

Найти семейство линий наибыстрейшего возрастания для следующих полей:

10.45. Плоского поля $u=x^2-y^2$.

10.46. Трехмерного поля $u=xyz$.

10.47. Трехмерного поля $u=x^2+y^2-z^2$.

§ 2. Криволинейные и поверхностные интегралы

1. Криволинейный интеграл 1-го рода. Пусть $\breve{AB}$ — дуга кусочно гладкой кривой, $u(P)$ — заданное на $\breve{AB}$ скалярное поле, $A=A_0$, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, $A_n=B$ — произвольное разбиение дуги $\breve{AB}$ и P_ν ($\nu=1, 2, \ldots, n$) — произвольные точки на частичных дугах $\overset{\frown}{A_{\nu-1}A_\nu}$, длины которых обозначим через Δs_ν. Если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\Delta s_\nu$ при $\max_\nu \Delta s_\nu \to 0$ (и $n\to\infty$), который не зависит ни от способа разбиения дуги $\breve{AB}$ точками A_ν, ни от выбора точек P_ν в частичных дугах $\overset{\frown}{A_{\nu-1}A_\nu}$, то этот предел называется *криволинейным интегралом 1-го рода* от функции $u(P)$ по кривой $\breve{AB}$ и обозначается через

$$\int\limits_{\breve{AB}} u(P)\,ds=\int\limits_{\breve{AB}} u(x, y, z)\,ds$$

(ds — дифференциал дуги), т. е.

$$\int\limits_{\breve{AB}} u(P)\,ds=\lim_{\max\limits_\nu \Delta s_\nu\to 0}\sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\Delta s_\nu. \tag{1}$$

Если функция $u(P)$ непрерывна на $\breve{AB}$, то интеграл (1) существует.

Физически интеграл (1) можно рассматривать как массу кривой $\breve{AB}$. Вычисление интеграла (1) сводится к вычислению определенного интеграла. Например, если уравнение дуги $\breve{AB}$ задано в виде

$x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(P)\,ds=\int\limits_{t_0}^{t_1} u(x(t),\ y(t),\ z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от того, в каком направлении проходится дуга AB, иными словами,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(P)\,ds=\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} u(P)\,ds.$$

Пример 1. Определить массу M первого витка винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ht$, если плотность $\mu(P)$ в каждой ее точке пропорциональна длине радиус-вектора этой точки.

◀ Так как $\mu=kr=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то в точках винтовой линии $\mu=k\sqrt{a^2+h^2t^2}$. Первому витку отвечает изменение параметра t от 0 до 2π и

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{a^2+h^2}\,dt.$$

Отсюда

$$M=\int\limits_0^{2\pi} k\sqrt{a^2+h^2}\sqrt{a^2+h^2t^2}\,dt=$$

$$=k\sqrt{a^2+h^2}\left(\frac{t}{2}\sqrt{a^2+h^2t^2}+\frac{a^2}{2h}\ln\left(ht+\sqrt{a^2+h^2t^2}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=k\sqrt{a^2+h^2}\left(\pi\sqrt{a^2+4\pi^2h^2}+\frac{a^2}{2h}\ln\frac{2\pi h+\sqrt{a^2+4\pi^2h^2}}{a}\right).\ ▶$$

В задачах 10.48—10.54 вычислить следующие криволинейные интегралы 1-го рода:

10.48. $\int\limits_C (x+y)\,ds$, где C — контур треугольника ABO с вершинами $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$ и $O(0,\ 0)$.

10.49. $\int\limits_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где C — отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,\ 0)$ и $A(1,\ 2)$.

10.50. $\int\limits_C xy\,ds$, где C — контур квадрата $|x|+|y|=a$ $(a>0)$.

10.51. $\int\limits_C y^2\,ds$, где C — первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

10.52. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, где C — дуга развертки окружности $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

10.53. $\int\limits_C \frac{y\,ds}{x+32}$, где C — дуга линии $x=t$, $y=t^2/\sqrt{2}$, $z=t^3/3$ от $O(0,\ 0,\ 0)$ до $B(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2\sqrt{2}/3)$.

10.54. $\int\limits_C (x^2+y^2)\,ds$, где C — дуга логарифмической спирали $r=ae^{m\varphi}$ от точки $A(a,\ 0)$ до точки $O(0,\ 0)$.

10.55. Найти массу всей астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, если плотность $\mu(P)$ в каждой ее точке P выражается формулой $\mu(P)=k|xy|$, где $k>0$ — коэффициент пропорциональности.

10.56. Найти массу всей кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$, если плотность $\mu(P)$ в каждой ее точке P выражается формулой $\mu(P)=k\sqrt{r}$, где $k>0$ — коэффициент пропорциональности.

10.57. Найти массу всей лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$, если плотность $\mu(P)$ в каждой ее точке P выражается формулой $\mu(P)=kr$, где $k>0$ — коэффициент пропорциональности.

10.58. Найти массу дуги конической винтовой линии $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$, если плотность μ в каждой ее точке выражается формулой $\mu=ke^t$ (где $k>0$ — коэффициент пропорциональности), от точки $O(0,\ 0,\ 0)$ до точки $A(a,\ 0,\ a)$.

10.59. Найти, с какой силой масса M, равномерно распределенная вдоль окружности $x^2+y^2=a^2$, $z=c$, притягивает точечную массу m, помещенную в начале координат.

10.60. Найти массу четверти окружности $x^2+y^2=r^2$, расположенной в первом квадранте, если плотность ее в каждой точке пропорциональна абсциссе этой точки (коэффициент пропорциональности α).

10.61. Найти массу полуокружности $x^2+y^2=r^2$, расположенной в верхней полуплоскости, если плотность ее в каждой точке пропорциональна кубу ординаты этой точки (коэффициент пропорциональности β).

2. **Поверхностный интеграл 1-го рода.** Пусть G — кусочно гладкая поверхность, $u(P)$ — заданное на G скалярное поле, $G_1, G_2, \ldots, G_n$ — произвольное разбиение поверхности G на частичные поверхности, площади которых равны $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$, и пусть P_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ — произвольные точки на частичных поверхностях G_ν. Если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum\limits_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\,\Delta\sigma_\nu$ при $\max\limits_\nu \Delta\sigma_\nu\to 0$ (и $n\to\infty$), который не зависит ни от способа раз-

5*

биения поверхности G на частичные поверхности, ни от выбора точек P_ν на этих частичных поверхностях, то этот предел называется *поверхностным интегралом 1-го рода* от функции $u(P)$ по поверхности G и обозначается через

$$\iint_G u(P)\,d\sigma = \iint_G u(x,\ y,\ z)\,d\sigma$$

($d\sigma$ — дифференциал площади поверхности), т. е.

$$\iint_G u(P)\,d\sigma = \lim_{\max\limits_\nu \Delta\sigma_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\,\Delta\sigma_\nu. \qquad (2)$$

Если $u(P)$ непрерывна на G, то интеграл (2) существует. Вычисление интеграла (2) сводится к вычислению обычного двойного интеграла. Допустим, что прямая, параллельная оси Oz, пересекает поверхность G лишь в одной точке, т. е. уравнение поверхности имеет вид $z=f(x,\ y)$, и пусть G проектируется на плоскость Oxy в область D. Элемент $d\sigma_1$ площади D выражается в виде $d\sigma_1 = d\sigma\cos\gamma$, где γ — острый угол, который нормаль к поверхности G составляет с осью Oz:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Таким образом,

$$\iint_G u(x,\ y,\ z)\,d\sigma = \iint_D u(x,\ y,\ z)\,\frac{d\sigma_1}{\cos\gamma} = \iint_D u(x,\ y,\ z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Если прямая, параллельная оси Oz, пересекает поверхность G в двух или более точках, то G разбивается на части, каждая из которых пересекается с прямой, параллельной оси Oz, лишь в одной точке. Интегрирование следует выполнять по каждой из полученных частей.

Вместо плоскости Oxy поверхность G можно проектировать на плоскости Oxz или Oyz.

Для двусторонних поверхностей поверхностный интеграл 1-го рода не зависит от того, по какой стороне поверхности он берется. Физический смысл поверхностного интеграла 1-го рода зависит от физического характера данного скалярного поля: он может определять массу, распределенную по данной поверхности, электрический заряд и т. д.

Пример 2. Определить статический момент относительно плоскости Oxy и положение центра масс однородной полусферы G (плотности 1): $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z \geq 0)$.

◄ Имеем

$$M_{xy} = \iint_G z\,d\sigma = \iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

где D — круг $x^2+y^2 \leq R^2$, $z=0$. Так как на полусфере $x\,dx+y\,dy+z\,dz=0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

откуда

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

и

$$M_{xy} = \iint_G z\,d\sigma = \iint_D R\,dx\,dy = R\iint_D dx\,dy = R\cdot\pi R^2 = \pi R^3.$$

Определим теперь координаты центра масс полусферы. В силу симметрии

$$x_0 = y_0 = 0.$$

Далее, так как площадь Q поверхности полусферы G есть $2\pi R^2$, то

$$z_0 = \frac{M_{xy}}{Q} = \frac{R}{2}.\ ►$$

Пример 3. На всей поверхности конуса с высотой h и радиусом основания a распределены электрические заряды. В каждой точке поверхности плотность заряда пропорциональна аппликате этой точки ($\rho = kz$). Вершина конуса — в начале координат, его ось направлена по оси Oz. Определить суммарный заряд всей поверхности конуса.

◄ Суммарный заряд основания конуса равен произведению его площади πa^2 на плотность точечного заряда, т. е. kh. Таким образом, $E_{осн} = k\pi a^2 h$. Заряд боковой поверхности G определяется интегралом

$$E_{бок.\,пов} = \iint_G kz\,d\sigma.$$

Уравнение поверхности конуса $z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2+y^2)$, $0 \leq z \leq h$. Дифференцируя, находим $z\,dz = \frac{h^2}{a^2}(x\,dx+y\,dy)$, откуда $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h^2}{a^2}\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h^2}{a^2}\frac{y}{z}$ и, следовательно,

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{h^4}{a^4}\cdot\frac{x^2+y^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}.$$

Поэтому

$$E_{бок.\,пов} = k\iint_G z\,d\sigma = \frac{kh}{a}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\,dx\,dy,$$

где D — круг $x^2+y^2 \leq a^2$, $z=0$. Переходя к полярным координатам, получаем:

$$E_{бок.\,пов} = \frac{kh\sqrt{a^2+h^2}}{a^2}\iint_D r^2\,dr\,d\varphi = \frac{kh\sqrt{a^2+h^2}}{a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\,dr = \frac{2}{3}k\pi ah\sqrt{a^2+h^2}.$$

Находим весь заряд:

$$E = E_{осн} + E_{бок.\,пов} = k\pi a^2 h + \frac{2}{3}k\pi ah\sqrt{a^2+h^2} = \frac{k\pi ah}{3}\left(3a+2\sqrt{a^2+h^2}\right).\ ►$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы 1-го рода:

10.62. $\iint\limits_G x^2yz\,d\sigma$, где G — часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте.

10.63. $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, где G — часть поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$, $0\leqslant z\leqslant 1$.

10.64. $\iint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\,d\sigma$, где G — сфера $x^2+y^2+z^2=1$.

10.65. $\iint\limits_G (x+y+z)\,d\sigma$, где G — часть сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, лежащая в первом октанте.

10.66. Определить массу, распределенную на части поверхности гиперболического параболоида $2az=x^2-y^2$, вырезаемой цилиндром $x^2+y^2=a^2$, если плотность в каждой точке поверхности равна $k|z|$, где $k>0$ — коэффициент пропорциональности.

10.67. Определить момент инерции однородной (плотности 1) боковой поверхности конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant a)$ относительно оси Oz.

10.68. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности двуполостного гиперболоида $z^2=x^2+y^2+a^2$ $(a\leqslant z\leqslant a\sqrt{2})$, если плотность заряда в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки $(\varepsilon=kz)$.

10.69. Определить массу, распределенную по поверхности куба $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant a$, $|z|\leqslant a$, если поверхностная плотность в точке $P(x, y, z)$ равна $k\sqrt[3]{|xyz|}$, где $k>0$ — коэффициент пропорциональности.

10.70. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности параболоида $2az=x^2+y^2$, вырезаемой из него цилиндром $x^2+y^2=a^2$, если плотность заряда в каждой точке равна $k\sqrt{z}$, где $k>0$ — коэффициент пропорциональности.

3. Криволинейный интеграл 2-го рода. Пусть на дуге $\breve{AB}$ кусочно гладкой кривой задано векторное поле $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})=a_x(x, y, z)\boldsymbol{i}+a_y(x, y, z)\boldsymbol{j}+a_z(x, y, z)\boldsymbol{k}$, и пусть $A=A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n=B$ — произвольное разбиение дуги $\breve{AB}$ на частичные дуги, P_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ — произвольные точки на дугах $\breve{A_{\nu-1}A_\nu}$, а $\Delta\boldsymbol{r}_\nu$ — приращение радиус-вектора $\boldsymbol{r}(P)$ на концах дуги $\breve{A_{\nu-1}A_\nu}$. Тогда, если существует предел последовательности интегральных сумм

$\sum\limits_{\nu=1}^{n}(\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{r}_\nu)$ при $\max\limits_\nu|\Delta\boldsymbol{r}_\nu|\to 0$ (и $n\to\infty$), который не зависит ни от способа разбиения дуги $\breve{AB}$ на частичные дуги, ни от выбора точек P_ν в этих частичных дугах, то этот предел называется *криволинейным интегралом 2-го рода* по дуге $\breve{AB}$ и обозначается через

$$\int\limits_{\breve{AB}}(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})=\int\limits_{\breve{AB}}a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz,$$

т. е.

$$\int\limits_{\breve{AB}}(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})=\lim_{\max\limits_\nu|\Delta\boldsymbol{r}_\nu|\to 0}\sum_{\nu=1}^{n}(\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{r}_\nu). \qquad (3)$$

Здесь $(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$ и $(\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{r}_\nu)$ — скалярные произведения векторов. Если вектор-функция $\boldsymbol{a}(P)$ непрерывна на $\breve{AB}$, то интеграл (3) существует.

Интеграл (3) называют также *линейным интегралом* вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Аналогично определяются линейные интегралы в плоских и многомерных векторных полях. Если даны параметрические уравнения дуги $\breve{AB}$: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, то

$$\int\limits_{\breve{AB}}(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})=\int\limits_{t_0}^{t_1}(a_x(x(t), y(t), z(t))\,x'(t)+a_y(x(t), y(t), z(t))\,y'(t)+a_z(x(t), y(t), z(t))\,z'(t))\,dt. \qquad (4)$$

Здесь t_0 и t_1 — значения параметра t, отвечающие точкам A и B. В отличие от криволинейных интегралов 1-го рода, линейные интегралы (3) зависят от направления, по которому совершается интегрирование вдоль дуги $\breve{AB}$:

$$\int\limits_{\breve{BA}}(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})=-\int\limits_{\breve{AB}}(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}).$$

Простейший физический смысл линейного интеграла — работа силового поля $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ при перемещении в нем материальной точки по кривой $\breve{AB}$ из точки A в точку B.

Пример 4. Найти работу силового поля $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ при перемещении материальной точки вдоль первого витка конической винтовой линии $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$ из точки $A(0, 0, 0)$ в точку $B(a, 0, a)$.

◀ Так как $dx=ae^t(\cos t-\sin t)\,dt$, $dy=ae^t(\sin t+\cos t)\,dt$, $dz=ae^t\,dt$ и

$$(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r})=x\,dx+y\,dy+z\,dz=$$
$$=a^2e^{2t}((\cos t-\sin t)\cos t+(\sin t+\cos t)\sin t+1)\,dt=2a^2e^{2t}\,dt,$$

то, учитывая, что $t=-\infty$ в точке A и $t=0$ в точке B, имеем

$$\int\limits_{\breve{AB}}(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r})=2a^2\int\limits_{-\infty}^{0}e^{2t}\,dt=a^2. \ ▶$$

З а м е ч а н и е. Этот пример можно решить проще, если учесть, что в данном случае $(\boldsymbol{F},\ d\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{r},\ d\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}d(r^2)$, причем $r=|\boldsymbol{r}|=0$ в точке A и $r=a\sqrt{2}$ в точке B. Имеем:

$$\int\limits_{\breve{AB}}(\boldsymbol{F},\ d\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\int\limits_0^{a\sqrt{2}}d(r^2)=\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{a\sqrt{2}}=a^2.$$

Линейный интеграл вектора $\boldsymbol{a}$, взятый по замкнутому контуру C, называется *циркуляцией* вектора поля по данному контуру и обозначается символом $\oint\limits_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$. Направление обхода контура указывается заранее, причем положительным считается обход против часовой стрелки, а отрицательным — по часовой стрелке.

Для плоских векторных полей $\boldsymbol{a}=a_x(x,\ y)\,\boldsymbol{i}+a_y(x,\ y)\,\boldsymbol{j}$ имеет место следующее утверждение:

Если векторная функция $\boldsymbol{a}=a_x(x,\ y)\,\boldsymbol{i}+a_y(x,\ y)\,\boldsymbol{j}$ непрерывна вместе с производными $\frac{\partial a_x}{\partial y}$ и $\frac{\partial a_y}{\partial x}$ в замкнутой области $\overline{G}=G\cup C$, то

$$\iint\limits_G\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint\limits_C a_x\,dx+a_y\,dy$$

(ф о р м у л а Г р и н а).

П р и м е р 5. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_C (x+y)\,dx-(x-y)\,dy,$$

где C — окружность $x^2+y^2=r^2$.

◀ Применяя формулу Грина, можем записать:

$$\oint\limits_C (x+y)\,dx-(x-y)\,dy=\iint\limits_{K_C}(-1-1)\,dx\,dy=-2\pi r^2,$$

так как $\iint\limits_{K_C}dx\,dy$ есть площадь круга K_C: $x^2+y^2\leqslant r^2$. ▶

10.71. Вычислить работу силового поля $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$ при перемещении материальной точки вдоль верхней половины эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ из точки $A(a,\ 0)$ в точку $B(-a,\ 0)$.

10.72. Вычислить линейный интеграл $\int\limits_{\breve{OB}}(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})$, если $\boldsymbol{a}=y^2\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}$, $O(0,\ 0)$, $B(1,\ 1)$, по следующим путям: а) отрезок прямой OB; б) дуга параболы $x^2=y$; в) дуга параболы $y^2=x$; г) ломаная OAB, где $A(1,\ 0)$; д) ломаная OCB, где $C(0,\ 1)$.

10.73. Вычислить циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$ вдоль окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ в отрицательном направлении.

10.74. Вычислить линейный интеграл $\int\limits_{\breve{OA}}(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})$, если $\boldsymbol{a}=z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$, уравнение дуги $\breve{OA}$: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

10.75. Вычислить линейный интеграл $\int\limits_{\breve{OA}}(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})$, если $\boldsymbol{a}=-yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$, $\breve{OA}$ — первый виток винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ht$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

10.76.** Вычислить циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}=z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$ по окружности $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=R$ в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10.77. Вычислить циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ вдоль эллипса $\frac{x^2+y^2}{2}+z^2=a^2$, $y=x$ в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{i}$.

10.78. Вычислить работу силового поля $\boldsymbol{F}=2xy\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}-x^2\boldsymbol{k}$ при перемещении материальной точки вдоль сечения гиперболоида $x^2+y^2-2z^2=2a^2$ плоскостью $y=x$ от точки $(a,\ a,\ 0)$ до точки $(a\sqrt{2},\ a\sqrt{2},\ a)$.

Используя формулу Грина, вычислить интегралы:

10.79. $\oint\limits_C (x^2-y^2)\,dx+(x^2+y^2)\,dy$, где C — контур, образованный полуокружностью $y=\sqrt{r^2-x^2}$ и осью Ox.

10.80. $\oint\limits_C (x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy$, где C — контур, образованный синусоидой $y=\sin x$ и отрезком оси Ox при $0\leqslant x\leqslant\pi$.

10.81. $\oint\limits_{x^2+y^2=r^2} x^2y\,dx-xy^2\,dy$.

10.82. $\oint\limits_C (x+y)^2\,dx-(x^2+y^2)\,dy$, где C — треугольник с вершинами $O(0,\ 0)$, $A(1,\ 0)$ и $B(0,\ 1)$.

4. **Поверхностный интеграл 2-го рода.** Гладкая поверхность G в трехмерном пространстве называется *двусторонней*, если нормаль к поверхности при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности G и не имеющему общих точек с ее границей, возвращается в первоначальное положение. Выбор определенной стороны поверхности, т. е. выбор направления нормали к поверхности, называется *ориентацией* поверхности.

Пусть G — кусочно гладкая ориентированная поверхность и $\boldsymbol{a} = a_x(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + a_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ — векторное поле. Разобьем поверхность G на частичные поверхности $G_1, G_2, \ldots, G_n$, площади которых обозначим через $\Delta\sigma_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), а площади частичных поверхностей G_ν, снабженных единичными нормалями $\boldsymbol{n}_\nu(P_\nu)$ в точках $P_\nu \in G_\nu$, — через $\Delta\boldsymbol{\sigma}_\nu$ (т. е. считаем каждую такую площадь вектором длины $\Delta\sigma_\nu$ и направления $\boldsymbol{n}_\nu(P_\nu)$). Тогда, если существует предел последовательности интегральных сумм

$\sum\limits_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{\sigma}_\nu)$ при $\max\limits_{\nu} \Delta\sigma_\nu \to 0$ (и $n \to \infty$), который не зависит ни от способа разбиения поверхности G на частичные поверхности, ни от выбора точек P_ν на этих частичных поверхностях, то этот предел называется *поверхностным интегралом 2-го рода* по поверхности G и обозначается через

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint\limits_G a_x\,dy\,dz + a_y\,dx\,dz + a_z\,dx\,dy, \tag{5}$$

т. е.

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \lim_{\max\limits_\nu \Delta\sigma_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{\sigma}_\nu).$$

Если поле $\boldsymbol{a}(P)$ непрерывно на G, то интеграл (5) существует.

Поверхностный интеграл 2-го рода называют также *потоком* векторного поля $\boldsymbol{a}(P)$ через поверхность G. Его можно интерпретировать как количество жидкости или газа, протекающего за единицу времени в заданном направлении через поверхность G. Переход к другой стороне поверхности меняет направление нормали к поверхности, а потому и знак поверхностного интеграла 2-го рода.

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению поверхностного интеграла 1-го рода

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint\limits_G (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\,d\sigma = \iint\limits_G (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\,d\sigma, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичная нормаль к поверхности, или к вычислению суммы трех двойных интегралов

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint\limits_{D_1} a_x(x(y, z), y, z)\,dy\,dz + \iint\limits_{D_2} a_y(x, y(x, z), z)\,dx\,dz + \iint\limits_{D_3} a_z(x, y, z(x, y))\,dx\,dy,$$

где D_1, D_2 и D_3 — проекции G соответственно на плоскости Oyz, Oxz и Oxy, а $x(y, z)$, $y(x, z)$ и $z(x, y)$ — выражения, полученные из уравнения поверхности G разрешением относительно соответствующих координат.

Пример 6. Найти поток вектора $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через часть поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали.

◀ Имеем в силу (6)

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\,d\sigma = \iint\limits_G (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,d\sigma.$$

Так как в первом октанте внешняя нормаль эллипсоида со всеми осями координат образует острые углы, то все три направляющих косинуса неотрицательны. Поэтому

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} x\,dy\,dz + \iint\limits_{D_2} y\,dx\,dz + \iint\limits_{D_3} z\,dx\,dy = 3v = 3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi abc = \frac{\pi abc}{2}$$

(каждый из интегралов по D_1, D_2 и D_3 определяет объем одной восьмой части эллипсоида). ▶

Пример 7. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3R^2$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$ в направлении внешней нормали.

◀ Имеем:

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\,d\sigma = \iint\limits_G (x^2\cos\alpha - y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,d\sigma = \iint\limits_G x^2\cos\alpha\,d\sigma - \iint\limits_G y^2\cos\beta\,d\sigma + \iint\limits_G z^2\cos\gamma\,d\sigma.$$

Заданная поверхность ограничена сверху сегментом сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2$, с боков — частью поверхности гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$, снизу кругом $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $z = 0$ (рис. 94). На плоскости Oyz и Oxz поверхность G проектируется дважды с разных сторон, поэтому, в силу симметрии поверхности относительно этих плоскостей, первые два интеграла в записи потока равны нулю:

$$\iint\limits_G x^2\cos\alpha\,d\sigma = \iint\limits_G y^2\cos\beta\,d\sigma = 0.$$

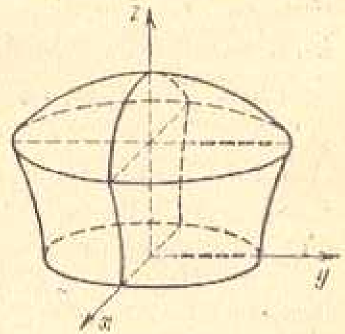

Рис. 94

На плоскость Oxy сферический сегмент проектируется в круг (область D_3') $x^2 + y^2 \leqslant 2R^2$, часть поверхности гиперболоида — в кольцо (область D_3'') $R^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2R^2$, а нижним основанием служит лежащий в этой плоскости круг (область D_3''') $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. Но для сегмента сферы $\cos\gamma > 0$, для гиперболоида $\cos\gamma < 0$, а на нижнем основании $z = 0$. Поэтому

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\,d\sigma = \iint\limits_G z^2\cos\gamma\,d\sigma = \iint\limits_{D_3'} (3R^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy - \iint\limits_{D_3''} (x^2 + y^2 - R^2)\,dx\,dy.$$

Для вычисления интегралов перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_{D_2'} (3R^2-x^2-y^2)\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{2}} (3R^2-r^2)\,r\,dr=4\pi R^4,$$

$$\iint\limits_{D_2''} (x^2+y^2-R^2)\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_R^{R\sqrt{2}} (r^2-R^2)\,r\,dr=\frac{\pi R^4}{2}.$$

Таким образом, окончательно находим: $\iint\limits_G (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\,d\sigma=\frac{7}{2}\pi R^4$. ►

В задачах 10.83—10.86 вычислить поверхностные интегралы 2-го рода:

10.83. $\iint\limits_G y\,dx\,dz$, где G — верхняя сторона части плоскости $x+y+z=a$, лежащей в первом октанте.

10.84. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{z}$, где G — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

10.85. $\iint\limits_G x^2\,dy\,dz$, где G — внешняя сторона части поверхности параболоида $z=\frac{H}{R^2}(x^2+y^2)$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\leqslant H$.

10.86. $\iint\limits_G z^2\,dx\,dy$, где G — внешняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geqslant 0$.

10.87. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant H$ в направлении внешней нормали.

10.88. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=2x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$ через часть поверхности цилиндра $x^2+y^2=R^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $0\leqslant z\leqslant H$, в направлении внешней нормали.

10.89. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ через часть поверхности параболоида $\frac{H}{R^2}(x^2+y^2)=z$, $z\leqslant H$, в направлении внутренней нормали.

10.90. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ через часть сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, в направлении внешней нормали.

10.91. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность куба $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant a$, $|z|\leqslant a$ в направлении внешней нормали.

10.92. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=2x^2\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{2R^2-x^2-y^2}$ в направлении внешней нормали.

10.93. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ через часть поверхности параболоида $z=\frac{H}{R^2}(x^2-y^2)$, вырезаемую плоскостями $x=R$, $z=0$, $x=0$, ориентированной в соответствии с направлением орта $\boldsymbol{k}$.

10.94. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ через часть поверхности параболоида $z=\frac{H}{R^2}(x^2-y^2)$, вырезаемую цилиндром $x^2+y^2=R^2$, ориентированной в соответствии с направлением орта $\boldsymbol{k}$.

§ 3. Соотношения между различными характеристиками скалярных и векторных полей

1. Дивергенция векторного поля и теорема Гаусса — Остроградского. *Дивергенцией* (или расхождением) векторного поля $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, обозначаемой через $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, называется скалярная величина, равная пределу отношения потока векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнутую поверхность Σ_P к величине v_P объема тела, ограниченного этой поверхностью, при $v_P\to 0$, т. е. при условии, что поверхность стягивается в точку P:

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{a})_P=\lim_{v_P\to 0}\frac{\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma_P}(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma})}{v_P}. \qquad (1)$$

Дивергенция характеризует отнесенную к единице объема мощность потока векторного поля, «исходящего» из точки P, т. е. мощность источника (при $(\operatorname{div}\boldsymbol{a})_P>0$) или стока (при $(\operatorname{div}\boldsymbol{a})_P<0$), находящегося в точке P.

В трехмерном евклидовом пространстве дивергенция поля выражается следующим образом:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Теорема Гаусса—Остроградского. *Поток векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ через замкнутую поверхность Σ, лежащую в этом поле, в направлении ее внешней нормали, равен тройному интегралу по области V, ограниченной этой поверхностью, от дивергенции этого векторного поля*, т. е.:

$$\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\,d\sigma=\iint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dv.$$

Пример 1. Используя теорему Гаусса—Остроградского, найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+R^2z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность G тела $\frac{H}{R^2}(x^2+y^2)\leqslant z\leqslant H$ в направлении внешней нормали.

◀ Имеем $\operatorname{div} \boldsymbol{a}=3(x^2+y^2)+R^2$. Поэтому

$$\iint_G (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, d\sigma=\iiint_V (3(x^2+y^2)+R^2)\, dv.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение поверхности примет вид $z=Hr^2/R^2$.

$$\iiint_V (3(x^2+y^2)+R^2)\, dv=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (3r^2+R^2)\, r\, dr \int_{\frac{Hr^2}{R^2}}^{H} dz=$$

$$=2\pi \int_0^R (3r^2+R^2)\left(H-\frac{Hr^2}{R^2}\right) r\, dr=\frac{2\pi H}{R^2}\int_0^R (R^4+2R^2r^2-3r^4)\, r\, dr=$$

$$=\pi H R^4. \ ▶$$

10.95. Найти $\operatorname{div}(xy\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k})$.

10.96. Найти $\operatorname{div}\dfrac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$.

10.97. Найти дивергенцию векторного поля $\boldsymbol{a}=x^2y\boldsymbol{i}+xy^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ в точке $P(1, 2, -1)$.

10.98. Найти дивергенцию градиента скалярного поля $u=x^3y^2z$ в точке $P(1, -1, 1)$.

10.99. Магнитное поле, создаваемое электрическим током силы I, текущим по бесконечному проводу, определяется формулой $\boldsymbol{H}(P)=\boldsymbol{H}(x, y)=2I\dfrac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$. Вычислить $\operatorname{div}\boldsymbol{H}(P)$.

10.100. Найти дивергенцию векторного поля $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}]$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

10.101. Найти $\operatorname{div}(r[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}])$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

Используя теорему Гаусса—Остроградского, решить следующие задачи:

10.102. Доказать, что поток радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ через любую кусочно гладкую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен утроенному объему тела, ограниченного этой поверхностью.

10.103. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}-z^3\boldsymbol{k}$ через всю поверхность куба $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ в направлении внешней нормали.

10.104. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}/r$ через всю поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ в направлении внешней нормали.

10.105*. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=2x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$, направленный в отрицательную сторону оси Ox, через поверхность части параболоида $y^2+z^2=Rx$, отсекаемой плоскостью $x=R$.

10.106. Распространить понятие потока и дивергенции на случай плоского (двумерного) поля и сформулировать теорему Гаусса—Остроградского для этого случая.

10.107*. Используя решение предыдущей задачи, преобразовать циркуляцию вектора по замкнутому контуру L в плоском поле в двойной интеграл по площади, ограниченной этим контуром.

10.108. Найти с помощью теоремы Гаусса—Остроградского поток вектора $\boldsymbol{a}=x^2y\boldsymbol{i}+xy^2\boldsymbol{j}+xyz\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ в направлении внешней нормали.

10.109. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x^2y\boldsymbol{i}-xy^2\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $x^2+y^2\leqslant R^2$, $0\leqslant z\leqslant H$ в направлении внешней нормали.

2. Вихрь векторного поля. Теорема Стокса. *Вихрем* векторного поля $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, обозначаемым $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$, называется вектор, который в каждой точке P дифференцируемости поля определяется следующим образом:

$$(\text{пр}_{\boldsymbol{s}} \operatorname{rot} \boldsymbol{a})_P=\lim_{\sigma_P\to 0}\frac{\oint\limits_{l_P}(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})}{\sigma_P}.$$

Здесь $\boldsymbol{s}$ — единичный вектор произвольного направления, l_P — малый замкнутый контур, окружающий точку P, лежащий в плоскости, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{s}$ и обходимый в положительном по отношению к вектору $\boldsymbol{s}$ направлении, σ_P — площадь области, ограниченной контуром l_P; предел ищется при условии, что контур l_P стягивается в точку P. В трехмерном пространстве $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ через декартовы прямоугольные координаты вектора $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ выражается следующим образом:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

Теорема Стокса. *Циркуляция дифференцируемого векторного поля $\boldsymbol{a}$ по произвольному кусочно гладкому замкнутому контуру L равна потоку вектора $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ через поверхность G, ограниченную этим контуром L:*

$$\oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})=\iint_G (\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}), \qquad (2)$$

или в координатной форме

$$\oint_L (a_x\, dx+a_y\, dy+a_z\, dz)=$$

$$=\iint_G \left(\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)d\sigma.$$

При этом единичный вектор $\mathbf{n}$ нормали к поверхности G направлен в такую сторону, чтобы обход контура L происходил в положительном по отношению к $\mathbf{n}$ направлении.

Пример 2. Проверить ответ задачи 10.76 при помощи теоремы Стокса.

◀ Так как $\mathbf{a}=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$, то $\operatorname{rot}\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. За поверхность G, ограниченную контуром L, примем сам круг, образованный сечением шара $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ плоскостью $x+y+z=R$. Центр круга $O'\left(\frac{R}{3}, \frac{R}{3}, \frac{R}{3}\right)$; его радиус $R_1=R\sqrt{\frac{2}{3}}$. Единичный вектор нормали $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$.

Так как $(\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, то находим

$$\oint\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})=\iint\limits_G (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})\,d\sigma=\sqrt{3}\iint\limits_G d\sigma=\sqrt{3}\,\pi R_1^2=\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}. \ ▶$$

Пример 3. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{a}=y\mathbf{i}-2z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ вдоль эллипса, образованного сечением гиперболоида $2x^2-y^2+z^2=R^2$ плоскостью $y=x$, в положительном направлении относительно орта $\mathbf{i}$. Ответ проверить при помощи теоремы Стокса.

◀ Параметрические уравнения заданного эллипса $x=R\cos t$, $y=R\cos t$, $z=R\sin t$. Для обхода в заданном направлении параметр t надо изменить от 0 до 2π. Следовательно,

$$\oint\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})=\oint\limits_L y\,dx-2z\,dy+x\,dz=$$

$$=R^2\int\limits_0^{2\pi}(-\sin t\cos t+2\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=3\pi R^2.$$

Применим теорему Стокса. Имеем $\operatorname{rot}\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$. За поверхность G, ограниченную контуром L, примем часть секущей плоскости, лежащей внутри эллипса. Единичный вектор нормали, направленный в нужную сторону, имеет вид $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$. Поэтому $(\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})=\frac{3}{\sqrt{2}}$ и

$$\iint\limits_G (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})\,d\sigma=\frac{3}{\sqrt{2}}\iint\limits_G d\sigma=\frac{3}{\sqrt{2}}\pi ab.$$

Но так как эллипс имеет полуоси $a=R\sqrt{2}$ и $b=R$, то

$$\iint\limits_G (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})\,d\sigma=3\pi R^2. \ ▶$$

10.110. Найти $\operatorname{rot} xyz(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$.

10.111. Найти $\operatorname{rot}(P(x, y)\,\mathbf{i}+Q(x, y)\,\mathbf{j})$.

10.112. Показать, что магнитное поле $\mathbf{H}(P)$ (см. задачу 10.99) в области своего определения является безвихревым.

10.113. Найти ротор поля $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$, если $\mathbf{a}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$ и $\mathbf{c}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

10.114. Найти $\operatorname{rot}\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\operatorname{rot}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$.

10.115*. Жидкая среда вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}=\omega_x\mathbf{i}+\omega_y\mathbf{j}+\omega_z\mathbf{k}$ вокруг оси, проходящей через начало координат. Найти вихрь поля скоростей этой среды.

10.116. Вывести формулу Грина (см. ответ к задаче 10.107), применяя теорему Стокса к двумерному векторному полю $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}$.

10.117. Пользуясь формулой Грина, убедиться в том, что площадь Q плоской области D, ограниченной кусочно гладким контуром L, можно найти при помощи любого из трех следующих интегралов:

$$Q=\oint\limits_L x\,dy, \quad Q=-\oint\limits_L y\,dx, \quad Q=\frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy-y\,dx.$$

10.118. Используя последнюю формулу предыдущей задачи, найти площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

а)* петлей Декартова листа $x^3+y^3-3axy=0$;

б) эволютой эллипса $x=\frac{a^2}{c}\cos^3 t$, $y=\frac{b^2}{c}\sin^3 t$ (a и b — полуоси эллипса, $c=\sqrt{a^2-b^2}$).

10.119. При помощи теоремы Стокса найти циркуляцию вектора $\mathbf{a}=z^2\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$ по сечению сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ плоскостью $x+y+z=R$ в положительном направлении относительно орта $\mathbf{k}$.

10.120. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{a}=z^2\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$ по сечению гиперболоида $2x^2-y^2+z^2=R^2$ плоскостью $x+y=0$ в положительном направлении относительно орта $\mathbf{i}$. Проверить при помощи теоремы Стокса.

10.121. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{a}=y^2\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+(x^2+y^2)\,\mathbf{k}$ по контуру, вырезаемому в первом октанте из параболоида $x^2+y^2=Rz$ плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=R$ в положительном направлении относительно внешней нормали параболоида. Проверить при помощи теоремы Стокса.

3. **Оператор Гамильтона и его применение.** Все операции векторного анализа можно выразить при помощи оператора Гамильтона — символического вектора ∇ (читается — набла), определяемого равенством

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Применяя известные операции умножения вектора на скаляр, скалярного и векторного произведения двух векторов, находим:

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \nabla u;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\boldsymbol{s}, \operatorname{grad} u) = (\boldsymbol{s}, \nabla u) = (\boldsymbol{s}, \nabla)\, u;$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = (\nabla, \boldsymbol{a});$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = [\nabla, \boldsymbol{a}].$$

По аналогии с производной по направлению от скалярной функции $\frac{\partial u}{\partial s}$ вводится понятие производной по направлению единичного вектора $\boldsymbol{s}$ от векторной функции $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Именно,

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial s} = (\boldsymbol{s}, \nabla)\,\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{s}, \operatorname{grad} a_x)\,\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{s}, \operatorname{grad} a_y)\,\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{s}, \operatorname{grad} a_z)\,\boldsymbol{k} = \frac{\partial a_x}{\partial s}\boldsymbol{i} + \frac{\partial a_y}{\partial s}\boldsymbol{j} + \frac{\partial a_z}{\partial s}\boldsymbol{k}.$$

Производные по направлению произвольного (не единичного) вектора $\boldsymbol{c}$ отличаются от производных по направлению единичного вектора только тем, что в них входит дополнительный скалярный множитель $|\boldsymbol{c}|$:

$$(\boldsymbol{c}, \nabla)\, u = (\boldsymbol{c}, \operatorname{grad} u),$$
$$(\boldsymbol{c}, \nabla)\,\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c}, \operatorname{grad} a_x)\,\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{c}, \operatorname{grad} a_y)\,\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{c}, \operatorname{grad} a_z)\,\boldsymbol{k}.$$

С помощью оператора Гамильтона удобно выполнять дифференциальные операции векторного анализа над сложными выражениями (произведение двух или более скалярных функций, произведение скалярной функции на вектор, скалярное и векторное произведения векторов и т. п.). Следует лишь помнить, что это оператор дифференцирования произведения.

Пример 4. Найти градиент произведения двух скалярных функций u и v.

◀ Имеем

$$\operatorname{grad}(uv) = \nabla(uv) = \nabla(\overset{\downarrow}{u}v) + \nabla(u\overset{\downarrow}{v})$$

(стрелка указывает функцию, на которую «действует» оператор). Но

$$\nabla(\overset{\downarrow}{u}v) = v\nabla u = v \operatorname{grad} u,$$
$$\nabla(u\overset{\downarrow}{v}) = u\nabla v = u \operatorname{grad} v.$$

Таким образом,

$$\operatorname{grad} uv = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v. \ ▶$$

Пример 5. Найти $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

◀ Так как по известной формуле векторной алгебры $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$, то, учитывая соотношение $[\nabla, [\boldsymbol{a}, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{c}}]] = 0$, имеем:
$\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] = [\nabla, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]] = [\nabla, [\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{c}]] + [\nabla, [\boldsymbol{a}, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{c}}]] = (\nabla, \boldsymbol{c})\,\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}} - (\nabla, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}})\,\boldsymbol{c}$.
Но $(\nabla, \boldsymbol{c})\,\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{c}, \nabla)\,\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}$, а это есть производная вектора $\boldsymbol{a}$ по направлению вектора $\boldsymbol{c}$. Далее,

$$(\nabla, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\,(\nabla, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \operatorname{div} \boldsymbol{a}.$$

Таким образом, $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{c}, \nabla)\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} \operatorname{div} \boldsymbol{a}$. ▶

Выполнить следующие дифференциальные операции ($\boldsymbol{c}$ — постоянный, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — переменные векторы):

10.122. Найти $\operatorname{div}(\boldsymbol{c}u)$ и $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}u)$.

10.123**. Найти $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ и $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

10.124. Найти $\operatorname{div}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ и $\operatorname{div}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

10.125*. Найти $\operatorname{rot}(\boldsymbol{c}u)$, $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}u)$ и $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

4. Дифференциальные операции 2-го порядка. Можно образовать пять дифференциальных операций 2-го порядка:

1) $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla)\, u = \nabla^2 u = \Delta u$ (лапласиан функции);
2) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla]\, u$;
3) $\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla(\nabla, \boldsymbol{a})$;
4) $\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = (\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}])$;
5) $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = [\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}]]$.

Кроме того, операцию ∇^2 можно применять и к векторным полям, т. е. рассматривать операцию $\nabla^2 \boldsymbol{a}$.

Вторая и четвертая операции приводят к нулю:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla]\, u = 0, \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = (\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}]) = 0.$$

Это следует из векторного смысла оператора ∇: в первом случае формально мы имеем векторное произведение двух коллинеарных векторов, а во втором — смешанное произведение компланарных векторов.

10.126. Получить выражения для

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \nabla^2 u,$$
$$\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla(\nabla, \boldsymbol{a}),$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = [\nabla[\nabla, \boldsymbol{a}]],$$
$$\nabla^2 \boldsymbol{a} = \nabla^2 a_x \boldsymbol{i} + \nabla^2 a_y \boldsymbol{j} + \nabla^2 a_z \boldsymbol{k}$$

через производные скалярного или векторного полей.

10.127. Найти $\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$.

10.128. Найти $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = xy^2\boldsymbol{i} + yz^2\boldsymbol{j} + zx^2\boldsymbol{k}$.

10.129. Найти $\nabla^2 \boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = (y^2 + z^2)\, x\boldsymbol{i} + (x^2 + z^2)\, y\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\, z\boldsymbol{k}$.

10.130. Найти $\operatorname{div}\operatorname{grad}(uv)$.

10.131. Найти $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u\boldsymbol{c})$ и $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})$ ($\boldsymbol{c}$ — постоянный, $\boldsymbol{a}$ — переменный вектор).

10.132. Найти $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(u\boldsymbol{c})$.

§ 4. Специальные виды векторных полей

1. Потенциальное векторное поле. Векторное поле $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ называется *потенциальным*, если вектор поля $\boldsymbol{a}$ является градиентом некоторой скалярной функции $u=u(P)$:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})=\operatorname{grad} u(P). \tag{1}$$

Функцию $u(P)$ в этом случае называют *потенциалом* векторного поля. Необходимым и достаточным условием потенциальности дважды дифференцируемого в односвязной области поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ является равенство нулю вихря этого поля:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}=0. \tag{2}$$

Пример 1. Проверить, что вихрь трехмерного векторного поля $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad} u$ тождественно равен нулю (функцию $u(P)$ предполагаем дважды дифференцируемой).

◀ Так как $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$, то, учитывая равенство смешанных производных 2-го порядка, получаем

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\operatorname{rot}\operatorname{grad} u=\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\boldsymbol{i}+$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)\boldsymbol{k}=0 \text{ ▶}$$

В п. 4 предыдущего параграфа это равенство было получено с использованием свойств символического вектора набла.

Потенциальное поле обладает следующими свойствами.

1. В области непрерывности потенциала поля линейный интеграл от вектора поля, взятый между двумя точками поля, не зависит от пути интегрирования и равен разности значений потенциала поля в конце и начале пути интегрирования

$$\int_A^B(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})=\int_A^B(\operatorname{grad} u,\ d\boldsymbol{r})=\int_A^B du=u(B)-u(A) \tag{3}$$

(использована легко проверяемая формула $(\operatorname{grad} u,\ d\boldsymbol{r})=du$).

2. Циркуляция вектора поля по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области непрерывности поля, равна нулю.

3. Если поле $\boldsymbol{a}$ потенциально, то потенциал поля $u(P)$ в произвольной точке P может быть вычислен по формуле (3):

$$u(P)=\int_A^P(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})+C, \tag{4}$$

причем $C=u(A)$, что легко получается подстановкой в (4) вместо переменной точки P фиксированной точки A.

Для вычисления интеграла (4) можно выбрать любой путь — проще всего в качестве такого пути выбрать ломаную со звеньями, параллельными осям координат, соединяющую точки A и P. За точку A удобно принимать начало координат (если оно лежит в области непрерывности поля).

Пример 2. Найти потенциал поля $\boldsymbol{a}=2xy\boldsymbol{i}+(x^2-2yz)\boldsymbol{j}-y^2\boldsymbol{k}$.

◀ Убедимся, что поле потенциально:

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}=\frac{\partial a_y}{\partial z}=-2y,\quad \frac{\partial a_x}{\partial z}=\frac{\partial a_z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial a_y}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial y}=2x.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0.$$

За путь интегрирования примем ломаную $OABP$, где $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(X,\ 0,\ 0)$, $B(X,\ Y,\ 0)$, $P(X,\ Y,\ Z)$. Находим:

$$u(X,\ Y,\ Z)=\int\limits_{OABP}(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})+C=\int_0^A(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})+\int_A^B(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})+\int_B^P(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})+C,$$
$$(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})=2xy\,dx+(x^2-2yz)\,dy-y^2\,dz.$$

Так как на $[OA]$ имеем $y=z=0$, $dy=dz=0$, $0\leqslant x\leqslant X$, то

$$\int_0^A(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})=0.$$

Аналогично на $[AB]$ имеем $x=X$, $dx=0$, $z=0$, $dz=0$, $0\leqslant y\leqslant Y$, поэтому

$$\int_A^B(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})=\int_0^Y X^2\,dy=X^2Y.$$

На $[BP]$ имеем $x=X$, $y=Y$, $dx=dy=0$, $0\leqslant z\leqslant Z$, значит,

$$\int_B^P(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})=-\int_0^Z Y^2\,dz=-Y^2Z.$$

Таким образом, $u(X,\ Y,\ Z)=X^2Y-Y^2Z+C$. Возвращаясь к переменным $x,\ y,\ z$, получаем

$$u(P)=x^2y-y^2z+C. \text{ ▶}$$

Замечание. Изложенный метод отыскания потенциала поля применяется при решении таких эквивалентных рассмотренной задач математического анализа, как восстановление функции двух, трех и n переменных по их полным дифференциалам, а также при интегрировании дифференциальных уравнений в полных дифференциалах.

Найти потенциалы следующих плоских и трехмерных полей:

10.133. $\boldsymbol{a}=(3x^2y-y^3)\boldsymbol{i}+(x^3-3xy^2)\boldsymbol{j}$.

10.134. $\boldsymbol{a}=\dfrac{\sin 2x\cos 2y\cdot\boldsymbol{i}+\cos 2x\sin 2y\cdot\boldsymbol{j}}{\sqrt{\cos^2 x\sin^2 y+\sin^2 x\cos^2 y}}$.

10.135. $\boldsymbol{a}=(yz-xy)\boldsymbol{i}+\left(xz-\frac{x^2}{2}+yz^2\right)\boldsymbol{j}+(xy+y^2z)\boldsymbol{k}$.

10.136*. $\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{z}-\frac{y}{x^2}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{x}-\frac{z}{y^2}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{z^2}\right)\boldsymbol{k}$.

10.137*. $a=\left(\frac{z}{y^2}-\frac{y}{z^2}-\frac{2yz}{x^3}\right)i+\left(\frac{z}{x^2}-\frac{x}{z^2}-\frac{2xz}{y^3}\right)j+$
$+\left(\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}+\frac{2xy}{z^3}\right)k.$

10.138.** Доказать, что во всюду непрерывном потенциальном векторном поле векторные линии не могут быть замкнутыми.

Если в плоском потенциальном поле есть точки, в которых поле теряет свойство непрерывности (так называемые *особые* точки), то циркуляция по замкнутому контуру, окружающему такую точку, может быть отлична от нуля. В этом случае циркуляция по контуру, обходящему данную особую точку один раз в положительном направлении, не зависит от формы контура и называется *циклической постоянной* относительно данной особой точки.

Аналогичными свойствами обладают трехмерные поля с особыми линиями, вдоль которых поле теряет свойство непрерывности.

10.139. Убедиться в потенциальности поля $a=\frac{xj-yi}{x^2+y^2}$. Определить его особую точку и ее циклическую постоянную.

10.140*. Доказать сформулированное выше свойство о том, что циркуляция по замкнутому контуру, окружающему особую точку, не зависит от формы контура.

10.141*. Воспользовавшись формулой (4) для определения потенциала поля, убедиться в том, что потенциал плоского поля, имеющего особые точки, будет многозначной функцией.

2. Соленоидальное поле. Векторное поле $a=a(r)$ называется *соленоидальным*, если дивергенция этого поля равна нулю: $\operatorname{div} a=0$.

Для трехмерного поля это условие можно переписать в виде

$$\operatorname{div} a=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=0. \tag{5}$$

В таком поле в силу теоремы Гаусса—Остроградского равен нулю поток вектора поля через любую замкнутую поверхность. Исключение может быть только в случае наличия в таком поле особых точек (в которых вектор поля не определен и дивергенция поля, если ее определять в такой точке при помощи формулы (1) § 3, отлична от нуля). В этом случае поток через замкнутую поверхность может быть отличен от нуля, но будет иметь одно и то же значение для всех замкнутых поверхностей, окружающих данную группу особых точек.

Пример 3. Доказать, что для любого дважды дифференцируемого трехмерного векторного поля $a=a(r)$ поле вихрей соленоидально.

◀ Имеем

$$\operatorname{rot} a=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)k.$$

Учитывая равенство смешанных производных 2-го порядка, получаем

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} a=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=0. \ ▶$$

В п. 4 предыдущего параграфа это соотношение доказано с помощью оператора набла.

10.142. Доказать, что в соленоидальном поле поток вектора через замкнутую поверхность, не содержащую внутри особых точек, равен нулю.

Проверить соленоидальность следующих полей:

10.143. $a=(x^2y+y^3)\,i+(x^3-xy^2)\,j.$

10.144. $a=xy^2i+x^2yj-(x^2+y^2)\,zk.$

10.145. $a=\frac{x}{yz}i+\frac{y}{xz}j-\frac{(x+y)\ln z}{xy}k.$

10.146. $a=\frac{xi-yj}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{(x^2-y^2)\,zk}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$

10.147*. Доказать, что в соленоидальном поле поток вектора поля через поперечное сечение любой векторной трубки (определенный в одном и том же направлении) сохраняет постоянное значение.

3. Лапласово (или гармоническое) поле. Векторное поле называется *лапласовым* (или *гармоническим*), если оно одновременно и потенциальное и соленоидальное, т. е. если

$$\operatorname{rot} a=0 \text{ и } \operatorname{div} a=0. \tag{6}$$

Пример 4. Доказать, что потенциал u двумерного или трехмерного лапласова поля является *гармонической функцией* двух или трех переменных $\left(\text{т. е. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\right)$.

◀ Действительно, имеем

$$\operatorname{div} a=\operatorname{div}\operatorname{grad} u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

для двух переменных,

$$\operatorname{div} a=\operatorname{div}\operatorname{grad} u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

для трех переменных. ▶

Пример 5. Показать, что потенциал поля сил тяготения, возникающего в пространстве, окружающем некоторую точечную массу, равен k/r ($k>0$ — коэффициент пропорциональности) и что поле сил тяготения лапласово.

◀ Поместим начало координат в центре притяжения. Тогда

$$a=\operatorname{grad}\frac{k}{r}=k\operatorname{grad}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-k\frac{xi+yj+zk}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\frac{kr}{r^3}.$$

Но это — вектор силы притяжения. Действительно, он направлен к центру притяжения, поскольку $-r/r$ — единичный вектор радиус-вектора точки $P(\boldsymbol{r})$, направленный к началу координат, а его модуль равен k/r^2, т. е. обратно пропорционален квадрату расстояния от центра притяжения. Покажем, что $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = -k \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0$. Имеем:

$$a_x = -\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = -k\frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = -k\frac{y^2+z^2-2x^2}{r^5}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = -k\frac{x^2+z^2-2y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = -k\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^5},$$

и потому

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = -\frac{k}{r^5}\left((y^2+z^2-2x^2)+(x^2+z^2-2y^2)+\right.$$
$$\left.+(x^2+y^2-2z^2)\right) = 0.$$

Итак, поле сил тяготения лапласово. ▶

10.148. Доказать, что плоское векторное поле, потенциалом которого служит функция $u = \ln r$ $(r = \sqrt{x^2+y^2})$, лапласово.

10.149*. Для гармонических в области G функций u и w доказать следующие формулы Грина:

а) $$\oiint_S u\frac{\partial w}{\partial n}\,d\sigma = \iiint_G (\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} w)\,dv$$

(первая формула Грина),

б) $$\oiint_S \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma = 0$$

(вторая формула Грина),

в) $$\oiint_S \frac{\partial (uw)}{\partial n}\,d\sigma = 2\iiint_G (\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} w)\,dv$$

(третья формула Грина).

Являются ли гармоническими следующие функции:

10.150. $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

10.151. $u = r - x = \sqrt{x^2+y^2} - x$.

10.152. $u = Ax + By + C$.

10.153. $u = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

10.154. $u = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$.

10.155. $u = Ax + By + Cz + D$.

10.156. $u = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$.

10.157. $u = a_{111}x^3 + a_{222}y^3 + a_{333}z^3 + 3a_{112}x^2y + 3a_{113}x^2z + 3a_{122}xy^2 + 3a_{223}y^2z + 3a_{133}xz^2 + 3a_{233}yz^2 + 6a_{123}xyz$.

§ 5. Применение криволинейных координат в векторном анализе

1. Криволинейные координаты. Основные соотношения. В пространстве задана система координат, если каждой точке P поставлена в соответствие тройка чисел q_1, q_2, q_3, причем различным тройкам чисел отвечают различные точки пространства. Числа q_1, q_2, q_3 называются *координатами* (или *криволинейными координатами*) точки $P = P(q_1, q_2, q_3)$. Наиболее употребительными являются следующие системы координат:

1) Декартова прямоугольная система координат. Здесь $q_1 = x$ — абсцисса точки P, $q_2 = y$ — ордината и $q_3 = z$ — аппликата.

2) Цилиндрическая система координат. Здесь за q_1 принимается расстояние r от точки P до оси z, $q_1 = r$ $(0 \leqslant r < +\infty)$, $q_2 = \varphi$ — угол, составленный проекцией радиус-вектора OP на плоскость Oxy с положительным направлением оси Ox $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, а $q_3 = z$ — аппликата точки P.

При этом цилиндрические координаты связаны с декартовыми прямоугольными координатами при помощи формул

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$$

и, обратно,

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

3) Сферическая система координат. Здесь $q_1 = r$ — длина радиус-вектора точки P $(0 \leqslant r < +\infty)$, $q_2 = \theta$ — угол между положительным направлением оси Oz и радиус-вектором OP точки P $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$[1], $q_3 = \varphi$ — угол между положительным направлением оси Ox и проекцией радиус-вектора OP на плоскость Oxy $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$. Имеют место формулы:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

и, обратно,

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Линия, вдоль которой изменяется только одна координата q_1, называется *координатной q_1-линией*, а единичный касательный вектор к этой линии, направленный в сторону возрастания q_1, — *единичным координатным ортом* $\boldsymbol{e}_{q_1}$ в точке $P(q_1^0, q_2^0, q_3^0)$. Аналогично определяются q_2- и q_3-линии и единичные орты $\boldsymbol{e}_{q_2}, \boldsymbol{e}_{q_3}$.

Если векторы $\boldsymbol{e}_{q_1}, \boldsymbol{e}_{q_2}, \boldsymbol{e}_{q_3}$ попарно ортогональны в любой точке пространства, то соответствующая система криволинейных координат q_1, q_2, q_3 называется *ортогональной*.

[1] Иногда за координату q_2 сферической системы принимают угол между радиус-вектором OP и плоскостью Oxy (см. § 2 гл. 8).

Пусть $P(q_1, q_2, q_3)$ — произвольная точка пространства, $P_1(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)$ — точка, лежащая на q_1-линии точки P, и $|\breve{PP_1}|$ — длина дуги $\breve{PP_1}$. Тогда число

$$L_1 = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{|\breve{PP_1}|}{\Delta q_1}$$

называется *коэффициентом Ламе* координаты q_1 в точке P. Аналогично определяются коэффициенты Ламе L_2 и L_3 координат q_2 и q_3.

Если точка $P(x, y, z)$ имеет криволинейные координаты $q_1 = q_1(x, y, z)$, $q_2 = q_2(x, y, z)$, $q_3 = q_3(x, y, z)$, то дифференциалы радиус-векторов $d\boldsymbol{r}_{q_\nu}$ координатных линий и дифференциалы их дуг ds_{q_ν} определяются с помощью равенств

$$d\boldsymbol{r}_{q_\nu} = \boldsymbol{i}\frac{\partial x}{\partial q_\nu}dq_\nu + \boldsymbol{j}\frac{\partial y}{\partial q_\nu}dq_\nu + \boldsymbol{k}\frac{\partial z}{\partial q_\nu}dq_\nu = L_\nu \boldsymbol{e}_{q_\nu}dq_\nu,$$

$$ds_{q_\nu} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_\nu}\right)^2}\,dq_\nu = L_\nu\,dq_\nu,$$

($\nu = 1, 2, 3$), где L_ν — коэффициенты Ламе.

Множество точек $P(q_1, q_2, q_3)$, для которых одна из координат постоянна, называется *координатной поверхностью*.

Дифференциалы площадей координатных поверхностей определяются по формулам

$$d\sigma_{q_1} = L_2L_3\,dq_2\,dq_3, \quad d\sigma_{q_2} = L_1L_3\,dq_1\,dq_3, \quad d\sigma_{q_3} = L_1L_2\,dq_1\,dq_2,$$

а дифференциал объема

$$dv = L_1L_2L_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3.$$

Найти вид координатных линий и координатных поверхностей и построить их в произвольной точке для следующих случаев:

10.158. Для декартовой прямоугольной системы координат.

10.159. Для цилиндрической системы координат.

10.160. Для сферической системы координат.

Вычислить коэффициенты Ламе:

10.161. В декартовой прямоугольной системе координат.

10.162. В цилиндрической системе координат.

10.163. В сферической системе координат.

Найти дифференциалы дуг координатных линий, дифференциалы площадей координатных поверхностей и дифференциал объема:

10.164. В декартовой прямоугольной системе координат.

10.165. В цилиндрической системе координат.

10.166. В сферической системе координат.

2. Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах. Указанные операции определяются следующими формулами:

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{L_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_{q_1} + \frac{1}{L_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_{q_2} + \frac{1}{L_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_{q_3},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{L_1L_2L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(L_2L_3a_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(L_1L_3a_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(L_1L_2a_{q_3})\right),$$

(здесь $\boldsymbol{a} = a_{q_1}\boldsymbol{e}_{q_1} + a_{q_2}\boldsymbol{e}_{q_2} + a_{q_3}\boldsymbol{e}_{q_3}$),

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \frac{1}{L_2L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}(L_3a_{q_3}) - \frac{\partial}{\partial q_3}(L_2a_{q_2})\right)\boldsymbol{e}_{q_1} + \frac{1}{L_1L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_3}(L_1a_{q_1}) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial q_1}(L_3a_{q_3})\right)\boldsymbol{e}_{q_2} + \frac{1}{L_1L_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(L_2a_{q_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2}(L_1a_{q_1})\right)\boldsymbol{e}_{q_3},$$

$$\Delta u = \nabla^2 u =$$
$$= \frac{1}{L_1L_2L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{L_2L_3}{L_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{L_1L_3}{L_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{L_1L_2}{L_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right).$$

Для цилиндрических координат r, φ и z найти выражения:

10.167. $\operatorname{grad} u$. **10.168.** Δu. **10.169.** $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$. **10.170.** $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

Для сферических координат r, θ, φ найти выражения:

10.171. $\operatorname{grad} u$. **10.172.** Δu. **10.173.** $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$. **10.174.** $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

Пример 1. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля $\boldsymbol{a} = \dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ и найти $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

◀ Так как в данном случае $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = \boldsymbol{r}$, то

$$\boldsymbol{a} = \frac{r\boldsymbol{e}_r - z\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{r^2+z^2}}.$$

По формулам, полученным при решении задач 10.169 и 10.170, находим:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right) =$$
$$= \frac{1}{r}\left(\frac{2r(r^2+z^2) - r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}} - r\frac{(r^2+z^2) - z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{2z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi +$$
$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial z} - \frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_z = -\frac{2rz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_\varphi. \ ▶$$

10.175. Вывести формулы:

а) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\nu = \dfrac{1}{L_1L_2L_3}\dfrac{\partial(L_jL_k)}{\partial q_\nu}$; б) $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_\nu = \dfrac{1}{L_\nu}[\operatorname{grad}L_\nu, \boldsymbol{e}_\nu]$;

10.176. Используя формулы, выведенные при решении задачи 10.175, найти $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ для единичных координатных векторов цилиндрической системы координат:

а) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_r$; б) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_\varphi$; в) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_z$.

10.177. Решить задачу, аналогичную 10.176, для сферической системы координат:

а) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_r$; б) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_\theta$; в) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_\varphi$.

10.178. Найти все гармонические функции вида:

а) $u=f(r)$; б) $u=f(\varphi)$; в) $u=f(z)$

(r, φ, z — цилиндрические координаты).

10.179. Найти все гармонические функции вида:

а) $u=f(r)$; б) $u=f(\theta)$; в) $u=f(\varphi)$

(r, θ, φ — сферические координаты).

10.180. Перейти к сферическим координатам в выражении скалярного поля $u=\dfrac{2xy(z^2-x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ и найти u, $\operatorname{grad}u$ и ∇^2u.

10.181. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении скалярного поля $u=\dfrac{2xyz+(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и найти u, $\operatorname{grad}u$ и ∇^2u.

10.182. Перейти к сферическим координатам в выражении векторного поля $\boldsymbol{a}=\dfrac{x\boldsymbol{j}-y\boldsymbol{i}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ и найти $\boldsymbol{a}$, $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

10.183. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля $\boldsymbol{a}=xz\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-z\sqrt{x^2+y^2}\,\boldsymbol{k}$ и найти $\boldsymbol{a}$, $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

3. Центральные, осевые и осесимметрические скалярные поля. Скалярное поле называется *центральным*, если функция поля $u=u(P)$ зависит только от расстояния точки P поля от некоторой постоянной точки — его центра. Если начало координат поместить в центр поля, то функция u примет вид

$$u=u(r)=u\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

При исследовании таких полей целесообразно пользоваться сферическими координатами. Поверхностями уровня такого поля будут сферы с центром в центре поля, и потому эти поля часто называют *сферическими*.

Скалярное поле называют *осевым*, если функция поля $u(P)$ зависит только от расстояния точки поля P от некоторой оси. Если принять эту ось за ось Oz и обозначить расстояние от точки P до нее через r, то функция u примет вид

$$u=u(r)=u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

При исследовании таких полей целесообразно пользоваться цилиндрическими координатами. Поверхностями уровня таких полей являются круговые цилиндры, оси которых совпадают с осью поля. Эти поля называют также *цилиндрическими*.

Если функция $u(P)$ скалярного поля принимает одни и те же значения в соответствующих точках всех полуплоскостей, проходящих через одну и ту же прямую (ось поля), то такое поле называют *осесимметрическим*. Поверхности уровня такого поля — поверхности вращения, оси которых совпадают с осью поля. Если ось поля принять за ось Oz, то при исследовании таких полей целесообразно пользоваться либо сферическими, либо цилиндрическими координатами. Функцию $u=u(P)$ можно в этом случае представить либо в виде

$$u=u(r,\ \theta)$$

(в сферических координатах), либо в виде

$$u=u(r,\ z)$$

(в цилиндрических координатах).

З а м е ч а н и е. Градиенты центральных, осевых и осесимметрических полей образуют векторные поля того же характера — центральные, осевые и осесимметрические.

Найти градиенты и лапласианы следующих полей:

10.184. $u=f(r)$, $\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

10.185. $u=f(r)$, $\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$.

10.186. $u=F(r,\theta)$ (r, θ — сферические координаты).

10.187. $u=F(r;z)$ (r, z — цилиндрические координаты).