$\alpha<2$).

$\leqslant\alpha\leqslant1$).

ункция

$\frac{x f(t)}{x^2+(y-t)^2}\,dt$

Лапласа

$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

рование по параметру, вычис-

ны:

x ($\alpha>0,\ \beta>0$).

$\sin mx\,dx$ ($\alpha>0,\ \beta>0,\ m\neq0$).

x ($\alpha\geqslant0$).

($\alpha>-1$).

dx ($\gamma>0$).

($-\infty<\alpha<+\infty$).

dx ($|\alpha|\leqslant1$).

dx ($|\alpha|\leqslant1$).

Глава 9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Уравнения 1-го порядка

1. Основные понятия. Функциональное уравнение

$$F(x,\ y,\ y')=0 \tag{1}$$

или

$$y'=f(x,\ y), \tag{2}$$

связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется *дифференциальным уравнением 1-го порядка.*

Решением (частным решением) уравнения (1) или (2) на интервале $(a,\ b)$ называется любая функция $y=\varphi(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение вместе со своей производной $\varphi'(x)$, обращает его в тождество относительно $x\in(a,\ b)$. Уравнение $\Phi(x,\ y)=0$, определяющее это решение как неявную функцию, называется *интегралом (частным интегралом)* дифференциального уравнения. На плоскости с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат уравнение $\Phi(x,\ y)=0$ определяет некоторую кривую, которая называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения.

Функция $y=\varphi(x,\ C)$ называется *общим решением* уравнения (1) или (2), если при любом допустимом значении параметра C она является частным решением этого уравнения и, кроме того, любое его частное решение может быть представлено в виде $y=\varphi(x,\ C_0)$ при некотором значении C_0 параметра C. Уравнение $\Phi(x,\ y,\ C)=0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Пример 1. Проверить подстановкой, что функция $\frac{\sin x}{x}$ есть решение дифференциального уравнения $xy'+y=\cos x$.

◀ Имеем $y=\frac{\sin x}{x}$, $y'=\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}$. Умножив y и y' соответственно на 1 и x и сложив полученные выражения, получим $xy'+y\equiv\cos x$. ▶

Пример 2. Показать, что функция $y=Cx^3$, $C\in\mathbb{R}$, является решением дифференциального уравнения $xy'-3y=0$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(1)=1$. (Найти интегральную кривую, проходящую через точку $M_0(1,\ 1)$.)

◀ Найдя $y'=3Cx^2$ и подставив выражения y и y' в дифференциальное уравнение, при любом значении C получим тождество $3Cx^3-3Cx^3\equiv0$. Это означает, что функция $y=Cx^3$ является решением дифференциального уравнения. Положив $x=1$, $y=1$, найдем значение параметра $C=1$, и, таким образом, получим искомое частное решение $y=x^3$. Иначе говоря, интегральной кривой, проходящей через точку $M_0(1, 1)$, является кубическая парабола $y=x^3$. ▶

Пусть задано уравнение

$$\Phi(x, y, C)=0,$$

определяющее на плоскости некоторое семейство кривых, зависящих от значений параметра C. Если составить систему двух уравнений

$$\Phi(x, y, C)=0, \quad \Phi'_x(x, y, C)=0,$$

то, исключая из этой системы параметр C, получим, вообще говоря, дифференциальное уравнение заданного семейства кривых.

Пример 3. Найти дифференциальное уравнение семейства окружностей $x^2+y^2=2ax$.

◀ Имеем систему уравнений

$$x^2+y^2=2ax,$$
$$2x+2yy'=2a.$$

Исключаем параметр a. Из второго уравнения находим $a=x+yy'$ и, подставляя это выражение в первое уравнение, получаем $x^2+y^2=2x(x+yy')$, т. е. $y^2-x^2=2xyy'$. Это и есть искомое дифференциальное уравнение. ▶

Показать, что при любом действительном значении параметра C заданные выражения определяют решения соответствующих дифференциальных уравнений:

9.1. $y=x(C-\ln|x|)$, $(x-y)\,dx+x\,dy=0$.

9.2. $y=x\left(\int\limits_0^x \frac{1}{x}e^x\,dx+C\right)$, $xy'-y=xe^x$.

9.3. $2x+y-1=Ce^{2y-x}$, $(2x+y+1)\,dx-(4x+2y-3)\,dy=0$.

В заданном семействе выделить уравнение кривой, удовлетворяющей приведенному начальному условию.

9.4. $y(\ln|x^2-1|+C)=1$, $y(0)=1$.

9.5. $y(1-Cx)=1$, $y(1)=0{,}5$.

9.6. $y=2+C\cos x$, $y(0)=-1$.

9.7. Написать уравнение, которому удовлетворяют все точки экстремума интегральных кривых дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$. Как отличить точки максимума от точек минимума?

9.8. Написать уравнение, которому удовлетворяют все точки перегиба интегральных кривых дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ и, в частности, дифференциальных уравнений:

а) $y'=y+x^2$;

б) $y'=e^y-x$.

Составить дифференциальные уравнения семейств кривых:

9.9. Парабол $y=x^2+2ax$. **9.10.** Гипербол $y=a/x$.

9.11. Цепных линий $y=a\operatorname{ch}x$.

9.12. Гипербол $x^2-y^2=2ax$.

9.13. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, у которых отрезок любой нормали, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

9.14. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, у которых отрезок любой касательной, заключенный между осями координат, делится точкой касания $M(x, y)$ в отношении $|AM|:|MB|=2:1$, где A — точка пересечения касательной с осью Oy, B — с осью Ox.

9.15. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, у которых площадь, заключенная между осями координат, этой кривой и переменной ординатой, пропорциональна четвертой степени этой ординаты.

2. Графический метод построения интегральных кривых (метод изоклин). Дифференциальное уравнение $y'=f(x, y)$ в плоскости с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат Oxy определяет *поле направлений* равенством $\operatorname{tg}\alpha=f(x, y)$.

Изоклиной уравнения (поля направлений) называется всякая кривая, определяемая уравнением

$$f(x, y)=k$$

при фиксированном k.

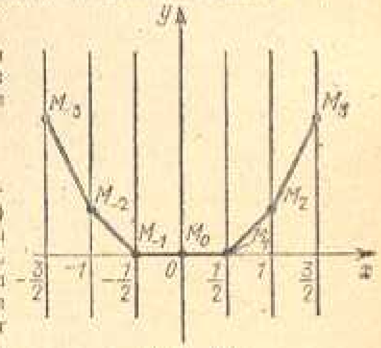


Рис. 92

Для приближенного (графического) решения уравнения $y'=f(x, y)$ построим на плоскости изоклины для нескольких значений k. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая начальная точка. Изоклина L_0, проходящая через эту точку, соответствует значению k, равному $k_0=f(x_0, y_0)$. Проведем отрезок M_0M_1 с угловым коэффициентом k_0 до пересечения в точке M_1 с ближайшей изоклиной L_1 (тем самым мы заменим дугу интегральной кривой отрезком ее касательной). Далее, из точки $M_1(x_1, y_1)$ проведем новый отрезок M_1M_2 с угловым коэффициентом $k_1=f(x_1, y_1)$ до пересечения в точке M_2 со следующей изоклиной L_2 и т. д.

В результате такого построения мы получим ломаную, являющуюся приближенным изображением интегральной кривой, проходящей через начальную точку M_0. Чем гуще взята сеть изоклин, тем более точно можно получить интегральную кривую.

Изменяя положение начальной точки M_0, аналогично можно построить приближенно и другие интегральные кривые.

Пример 4. Методом изоклин построить интегральную кривую уравнения $y'=2x$, проходящую через начало координат.

◀ Изоклины данного уравнения — параллельные прямые $2x=k$. Полагая $k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, получаем изоклины $x=0$, $x=\pm1/2$, $x=\pm1$, $x=\pm3/2$ и т. д. Построим их (рис. 92).

Отправляясь из начала координат влево и вправо, строим ломаную $\ldots M_{-3}M_{-2}M_{-1}M_0M_1M_2M_3\ldots$, звенья которой имеют угловые коэффициенты соответственно $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Эта ломаная и есть приближенное изображение интегральной кривой.

Рекомендуем читателю построить график соответствующего частного решения $y=x^2$ и сравнить его с построенной ломаной. ▶

Методом изоклин построить приближенно семейство интегральных кривых следующих дифференциальных уравнений:

9.16. $y'=x+y$. **9.17.** $y'=1+y$.

9.18. $y'=-y/x$. **9.19.** $y'=y-x^2$.

9.20. $y'=\frac{y}{x+y}$. **9.21.** $y'=\frac{y-3x}{x+3y}$.

3. Уравнения с разделяющимися переменными. Пусть в уравнении

$$y'=f(x, y)$$

функция $f(x, y)$ может быть разложена на множители, каждый из которых зависит только от одной переменной: $f(x, y)=f_1(x)f_2(y)$, или в уравнении

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0,$$

коэффициенты при dx и dy представляются в виде $M(x, y)=M_1(x)M_2(y)$, $N(x, y)=N_1(x)N_2(y)$. Путем деления соответственно на $f_2(y)$ и на $N_1(x)M_2(y)$ эти уравнения приводятся соответственно к виду

$$f_1(x)\,dx=\frac{1}{f_2(y)}\,dy, \quad \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx=-\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy.$$

Интегрируя левые части этих уравнений по x, а правые по y, приходим в каждом из них к общему интегралу исходного дифференциального уравнения.

Пример 5. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+1}.$$

◀ Разделяем переменные:

$$(3y^2+1)\,dy=2x\,dx.$$

Интегрируем:

$$\int(3y^2+1)\,dy=\int 2x\,dx+C,$$

или

$$y^3+y-x^2=C$$

(общий интеграл уравнения). ▶

Если в уравнении с разделяющимися переменными $y'=f_1(x)f_2(y)$ функция $f_2(y)$ имеет действительный корень y_0, т. е. если $f_2(y_0)=0$, то функция $y(x)=y_0$ является решением уравнения (в чем легко

убедиться непосредственной подстановкой). При делении обеих частей этого уравнения на $f_2(y)$ (при разделении переменных) решение $y(x)=y_0$ может быть потеряно.

Аналогично, при интегрировании уравнения $M_1(x)M_2(y)\,dx+N_1(x)N_2(y)\,dy=0$ могут быть потеряны интегральные кривые $x(y)=x_0$ и $y(x)=y_0$, где x_0 — действительный корень уравнения $N_1(x)=0$, y_0 — действительный корень уравнения $M_2(y)=0$.

Поэтому, получив указанным выше методом разделения переменных общий интеграл уравнения, надо проверить, входят ли в его состав (при подходящих числовых значениях параметра C) упомянутые частные решения. Если входят, то потери решений нет. Если не входят, то их следует включить в состав интеграла.

Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx}=y\,\mathrm{tg}\,x.$$

◀ Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y}=\mathrm{tg}\,x\,dx.$$

Интегрируем:

$$\ln|y|=-\ln|\cos x|+C_1,$$

или

$$\ln|y\cos x|=C_1.$$

Для удобства потенцирования полученного равенства представим параметр C_1 в логарифмической форме, положив $C_1=\ln|C_2|$, $C_2\neq0$ (при этом C_1 принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$). Тогда

$$\ln|y\cos x|=\ln|C_2|$$

и, потенцируя, получаем общий интеграл в виде $y\cos x=C_2$, откуда

$$y=C_2\sec x. \tag{3}$$

Заметим теперь, что исходное дифференциальное уравнение имеет, очевидно, еще решение $y=0$, которое не входит в запись (3), так как $C_2\neq0$. Введем новый параметр C, принимающий, в отличие от C_2, также и нулевое значение. Тогда решение $y=0$ войдет в состав общего решения

$$y=C\sec x.$$ ▶

С помощью подстановки $u(x)=ax+by(x)+d$ к уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и дифференциальные уравнения вида

$$y'=f(ax+by+d), \quad b\neq0.$$

Решить дифференциальные уравнения:

9.22. $y'=x/y$. **9.23.** $y^2y'+x^2=1$.

9.24. $yy'+x=0$. **9.25.** $xy'=2y$.

9.26. $(x+1)y'+xy=0$.

9.27. $y'\sqrt{1-x^2}=1+y^2$. **9.28.** $y'=e^{x+y}$.

9.29. $y'+\frac{x\sin x}{y\cos y}=0$.

9.30. $(1+y^2)x\,dx+(1+x^2)\,dy=0$.

9.31. $xy\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$.

9.32. $ye^{2x}\,dx-(1+e^{2x})\,dy=0$.

9.33. $2e^x \operatorname{tg} y\,dx+(1+e^x)\sec^2 y\,dy=0$.

9.34. $(1+y)(e^x\,dx-e^{2y}\,dy)-(1+y^2)\,dy=0$.

9.35. $(1+x^2)\,dy+y\sqrt{1+x^2}\,dx-xy\,dx=0$.

9.36. $dy-2\sqrt{y}\ln x\,dx=0$.

9.37. $y'=\cos(x+y)$. 9.38. $y'=\dfrac{1}{2x+y}$.

9.39. $y'=(4x+y+1)^2$.

9.40. $y'=\sin(y-x-1)$. 9.41. $y'+2y=3x+5$.

9.42. $y'=\sqrt[3]{(4x-y+1)^2}$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

9.43. $(1+y^2)\,dx-xy\,dy=0$; $y(1)=0$.

9.44. $(xy^2+x)\,dy+(x^2y-y)\,dx=0$; $y(1)=1$.

9.45. $y'\operatorname{tg} x=y$; $y(\pi/2)=1$.

4. Однородные уравнения. Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется *однородным*, если его можно привести к виду

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

или к виду

$$M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=0, \tag{5}$$

где $M(x,\ y)$ и $N(x,\ y)$ — *однородные функции* одного порядка, т. е. существует такое $k\in\mathbb{Z}$, что $M(tx,\ ty)=t^kM(x,\ y)$ и $N(tx,\ ty)=t^kN(x,\ y)$ тождественно относительно x, y и $t\neq 0$.

С помощью подстановки $y/x=u(x)$ однородные уравнения (4) и (5) преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными.

Пример 7. Решить уравнение

$$y'=\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}.$$

◀ Положим $\dfrac{y}{x}=u$, или $y=ux$. Тогда $y'=u+x\dfrac{du}{dx}$, что после подстановки в исходное уравнение дает уравнение с разделяющимися переменными

$$x\frac{du}{dx}=\cos u.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{\cos u}=\frac{dx}{x}$$

и интегрируем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=Cx.$$

Получаем общее решение:

$$u=2\operatorname{arctg} Cx-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Возвращаясь к функции y, находим:

$$y=x\left(2\operatorname{arctg} Cx-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

При делении на $\cos u$ были потеряны решения $y=x\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. Добавляя их к полученному семейству решений, находим общий интеграл в виде

$$y=x\left(2\operatorname{arctg} Cx+\frac{\pi}{2}+\pi(2n-1)\right),$$

$$y=x\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right);\quad n,\ k\in\mathbb{Z}.\ ▶$$

Дифференциальные уравнения вида

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{6}$$

в случае $\dfrac{a_2}{a_1}\neq\dfrac{b_2}{b_1}$ приводятся к однородным уравнениям с помощью замены переменных

$$x=u+m,\quad y=v+n,$$

где m и n находятся из системы уравнений

$$a_1m+b_1n+c_1=0,$$
$$a_2m+b_2n+c_2=0.$$

Поскольку здесь $dx=du$, $dy=dv$, то уравнение (6) преобразуется к виду (4) относительно функции $v(u)$:

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1u+b_1v+a_1m+b_1n+c_1}{a_2u+b_2v+a_2m+b_2n+c_2}\right)=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)=$$
$$=f\left(\frac{a_1+b_1\dfrac{v}{u}}{a_2+b_2\dfrac{v}{u}}\right)=\varphi\left(\frac{v}{u}\right).$$

Если в уравнении (6) $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1}=\lambda$ и, следовательно, $a_2x+b_2y=\lambda(a_1x+b_1y)$, то оно примет вид

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=\varphi(a_1x+b_1y).$$

Подстановкой $u(x)=a_1x+b_1y(x)$ это уравнение преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными.

Решить дифференциальные уравнения:

9.46. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$. 9.47. $y'=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$.

9.48. $y'=(x-y)/(x+y)$.

9.49. $(x^2+xy)\,y'=x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$.
9.50. $(x-y)\,dx+x\,dy=0$.
9.51. $y^2\,dx+x^2\,dy=xy\,dy$.
9.52. $x\,(y'+e^{y/x})=y$.
9.53. $x\,dy-y\cos\ln\frac{y}{x}\,dx=0$.
9.54. $xy'=y+x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.
9.55. $xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}$.
9.56. $(x^2+y^2)\,dy-2xy\,dx=0$.
9.57. $3x^4y^2\,dy=(4x^6-y^6)\,dx$.
9.58. $(2x-y+1)\,dx+(2y-x-1)\,dy=0$.
9.59. $(y+2)\,dx-(2x+y-4)\,dy=0$.
9.60. $(x+y+1)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0$.
9.61. $(x+y-1)^2\,dy=2\,(y+2)^2\,dx$.
9.62. $y'-\operatorname{tg}\frac{y-2x}{x+1}=\frac{y+2}{x+1}$.
9.63. $y'\ln\frac{y+x}{x+3}=\frac{y+x}{x+3}-\ln\frac{y+x}{x+3}$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям:

9.64. $xy'=y\ln\frac{y}{x}$; $y(1)=1$.
9.65. $(\sqrt{xy}-x)\,dy+y\,dx=0$; $y(1)=1$.
9.66. $(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx-x\,dy=0$; $y(1)=0$.

5. Линейные уравнения. Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется *линейным*, если оно содержит y и y' в первой степени, т. е. имеет вид

$$y'=P(x)\,y+Q(x). \tag{7}$$

При $Q(x)=0$ уравнение (7) принимает вид

$$y'=P(x)\,y$$

и называется *линейным однородным*. Оно является уравнением с разделяющимися переменными, и его общее решение имеет вид

$$y=Ce^{\int P(x)\,dx}, \tag{8}$$

где C — произвольная постоянная, а $\int P(x)\,dx$ — одна из первообразных функции $P(x)$.

Интегрирование *линейного неоднородного* уравнения (7) можно провести одним из следующих методов.

а) Метод вариации постоянной. Будем искать решение уравнения (7) в виде

$$y=C(x)\,e^{\int P(x)\,dx}, \tag{9}$$

который получается из (8), если заменить постоянную C на функцию $C(x)$. Подставляя выражение (9) в уравнение (7), получим для неизвестной функции $C(x)$ уравнение с разделяющимися переменными:

$$C'(x)=Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Его общее решение:

$$C(x)=\int Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\,dx+C,$$

где C — произвольная постоянная, а $\int Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\,dx$ — одна из первообразных. Подставляя полученное выражение для $C(x)$ в формулу (9), находим общее решение уравнения (7):

$$y=e^{\int P(x)\,dx}\left(C+\int Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\,dx\right). \tag{10}$$

б) Метод подстановки. Положим $y(x)=u(x)\,v(x)$. Тогда уравнение (7) приводится к виду

$$v\left(\frac{du}{dx}-P(x)\,u\right)+\left(\frac{dv}{dx}u-Q(x)\right)=0. \tag{11}$$

Выберем функцию $u(x)$ так, чтобы первая скобка в левой части уравнения (11) обратилась в нуль. Для этого интегрируем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx}-P(x)\,u=0$$

и выбираем какое-либо частное его решение $u=u_1(x)$. Подставляя функцию $u_1(x)$ вместо u в левую часть уравнения (11), получаем уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx}u_1(x)-Q(x)=0.$$

Находим общее решение этого уравнения $v=v(x,C)$. Перемножая найденные функции $u_1(x)$ и $v(x,C)$, получаем общее решение уравнения (7):

$$y=u_1(x)\,v(x,C).$$

Пример 8. Решить уравнение $y'=y\operatorname{ctg}x+\sin x$.

◀ Применим метод вариации постоянной. Рассмотрим сначала соответствующее однородное линейное уравнение

$$y'=y\operatorname{ctg}x.$$

Его общее решение $y=C\sin x$. Следовательно, общее решение исходного уравнения ищем в виде $y=C(x)\sin x$. Подставляем y и $y'=C'(x)\sin x+C(x)\cos x$ в данное уравнение:

$$C'(x)\sin x+C(x)\cos x=\operatorname{ctg}x\cdot C(x)\sin x+\sin x,$$

откуда $C'(x)=1$, и тогда $C(x)=x+C$. Следовательно, общее решение уравнения есть

$$y=(x+C)\sin x. \ ▶$$

Пример 9. Решить уравнение $y'=\dfrac{y^2}{2xy+3}$.

◀ Перепишем уравнение в виде

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x}{y}+\frac{3}{y^2}$$

и заметим, что оно линейно относительно x и $\dfrac{dx}{dy}$. Решим его методом подстановки.

Положим $x=uv$ и приведем уравнение к виду

$$v\left(\frac{du}{dy}-\frac{2u}{y}\right)+\left(\frac{dv}{dy}u-\frac{3}{y^2}\right)=0. \qquad (12)$$

Найдем функцию $u_1(y)$, решая уравнение

$$\frac{du}{dy}-\frac{2u}{y}=0$$

и выбирая из его общего решения $u=y^2+C$ одно частное решение, например, $u_1(y)=y^2$. Подставляя $u_1(y)$ в уравнение (12), получим:

$$\frac{dv}{dy}y^2-\frac{3}{y^2}=0, \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dy}=\frac{3}{y^4}.$$

Общее решение этого уравнения:

$$v(y,\ C)=C-\frac{1}{y^3}.$$

Перемножая $u_1(y)$ и $v(y,\ C)$, получаем общее решение данного уравнения:

$$x=Cy^2-\frac{1}{y}. \ ▶$$

Решить дифференциальные уравнения:

9.67. $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

9.68. $y'=\dfrac{3y}{x}+x$. **9.69.** $y'+y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$.

9.70. $(1+x^2)y'=2xy+(1+x^2)^2$.

9.71. $y'+2y=e^{3x}$. **9.72.** $y'+\dfrac{y}{x}=2\ln x+1$.

9.73. $y'=\dfrac{2y}{x+1}+e^x(x+1)^2$. **9.74*.** $y'=\dfrac{y}{x+y^3}$.

9.75. $(1+y^2)\,dx=(\operatorname{arctg}y-x)\,dy$.

9.76. $xy'=y+x^2\cos x$. **9.77.** $xy'=e^x+xy$.

9.78. $xy'+x^2+xy=y$.

9.79. $y+y'\ln^2 y=(x+2\ln y)\,y'$.

9.80. $y-y'=y^2+xy'$.

9.81. $(x+2y^3)\,y'=y$.

9.82*. $y'+\operatorname{tg}y=\dfrac{x}{\cos y}$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

9.83. $y'+y\operatorname{tg}x=1/\cos x$; $\quad y(0)=0$.

9.84. $y'=2y+e^x-x$; $\quad y(0)=1/4$.

9.85. $y'=y/(2y\ln y+y-x)$; $\quad y(1)=1$.

6. Уравнение Бернулли. *Уравнением Бернулли* называется дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$y'=P(x)\,y+Q(x)\,y^m, \qquad (13)$$

где $m\neq 0$, $m\neq 1$ (при $m=0$ уравнение (13) является линейным, а при $m=1$ — уравнением с разделяющимися переменными).

Так же, как и линейное, уравнение Бернулли можно проинтегрировать с помощью подстановки $y=uv$ или свести к линейному уравнению с помощью подстановки $z=y^{1-m}$. Следует учесть, что при $m>1$ может быть потеряно решение $y=0$.

Пример 10. Решить уравнение

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{x^2}{y}.$$

◀ Полагая $y=uv$, приводим уравнение к виду

$$v\left(\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}\right)+\left(\frac{dv}{dx}u-\frac{x^2}{uv}\right)=0. \qquad (14)$$

Из общего решения $u=Cx$ уравнения

$$\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}=0$$

выбираем одно частное решение, например,

$$u_1=x.$$

Подставляя u_1 в уравнение (14), получаем новое уравнение $\dfrac{dv}{dx}x-\dfrac{x^2}{xv}=0$, или $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{1}{v}$. Его общее решение $v=\sqrt{2x+C}$.

Перемножая u_1 и v, получаем общее решение исходного уравнения $y=x\sqrt{2x+C}$. ▶

Пример 11. Решить уравнение

$$y'=\frac{y}{2x}-\frac{1}{2y}.$$

◀ Это уравнение Бернулли с $m=-1$. Поэтому полагаем $z=y^2$ и приводим уравнение к виду

$$z'=\frac{z}{x}-1.$$

Это уравнение является линейным. Решая однородное уравнение $z'=z/x$, находим $z=Cx$. Отсюда методом вариации постоянной, т. е. полагая $z=xC(x)$, получаем общее решение линейного уравнения в виде

$$z=x\ln\frac{C}{x},$$

или, окончательно,

$$y^2=x\ln\frac{C}{x}. \blacktriangleright$$

Решить дифференциальные уравнения:

9.86. $y'+4xy=2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

9.87. $dy=(y^2e^x-y)\,dx$.

9.88. $y'=y\,(y^3\cos x+\operatorname{tg} x)$.

9.89. $y'=y\operatorname{ctg} x+\dfrac{y^2}{\sin x}$. **9.90*.** $y'=\dfrac{2x}{x^2\cos y+\sin 2y}$.

9.91. $y'=\dfrac{x\,(x^2+y^2-1)}{2y\,(x^2-1)}$.

9.92. $xy'+y=2x^2y\ln y\cdot y'$.

9.93. $y'x^2\sin y+2y=xy'$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

9.94. $3dy=-(1+3y^3)\,y\sin x\,dx;\quad y\,(\pi/2)=1$.

9.95. $y\,dx+\left(x-\frac{1}{2}x^3y\right)dy=0;\quad y\,(1/2)=1$.

7. Уравнения в полных дифференциалах. Дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$P\,(x,\ y)\,dx+Q\,(x,\ y)\,dy=0 \tag{15}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U\,(x,\ y)$, т. е.

$$P\,(x,\ y)=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Q\,(x,\ y)=\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Для того чтобы уравнение (15) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{16}$$

Если уравнение (15) есть уравнение в полных дифференциалах, то оно может быть записано в виде

$$dU\,(x,\ y)=0.$$

Общий интеграл этого уравнения:

$$U\,(x,\ y)=C,$$

где C — произвольная постоянная.

Функция $U\,(x,\ y)$ может быть найдена следующим образом. Интегрируя равенство $\dfrac{\partial U}{\partial x}=P\,(x,\ y)$ по x при фиксированном y и замечая, что произвольная постоянная в этом случае может зависеть от y, имеем

$$U\,(x,\ y)=\int P\,(x,\ y)\,dx+\varphi\,(y). \tag{17}$$

Затем из равенства

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P\,(x,\ y)\,dx+\varphi'\,(y)=Q\,(x,\ y)$$

находим функцию $\varphi\,(y)$, подставив которую в (17), получим функцию $U\,(x,\ y)$.

Очевидно, что искомая функция $U\,(x,\ y)$ определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Для записи общего интеграла исходного уравнения достаточно выбрать одну из функций получаемого семейства.

Другой метод отыскания функции $U\,(x,\ y)$ состоит в вычислении криволинейного интеграла 2-го рода (см. гл. 10, § 2, 4):

$$U\,(x,\ y)=\int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)}P\,(x,\ y)\,dx+Q\,(x,\ y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}P\,(x,\ y_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q\,(x,\ y)\,dy=\int\limits_{y_0}^{y}Q\,(x_0,\ y)\,dy+\int\limits_{x_0}^{x}P\,(x,\ y)\,dx,$$

где точки $M_0\,(x_0,\ y_0)$ и $M\,(x,\ y)$ и путь интегрирования лежат в области непрерывности функций $P\,(x,\ y)$ и $Q\,(x,\ y)$ и их частных производных, причем $M_0\,(x_0,\ y_0)$ — некоторая фиксированная точка.

Пример 12. Решить уравнение

$$\frac{y}{x}\,dx+(y^3+\ln x)\,dy=0,$$

предварительно убедившись, что это есть уравнение в полных дифференциалах.

◀ Проверим условие (16):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x};\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\,(y^3+\ln x)=\frac{1}{x}.$$

Условие (16) выполнено, следовательно, заданное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Найдем функцию $U\,(x,\ y)$.

Первый способ. Интегрируя по x при постоянном y равенство

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P\,(x,\ y)=\frac{y}{x},$$

получим

$$U\,(x,\ y)=\int\frac{y}{x}\,dx+\varphi\,(y)=y\ln x+\varphi\,(y). \tag{18}$$

Заметим, что при вычислении первообразной мы здесь пишем $\ln x$, а не $\ln|x|$, так как исходное уравнение содержит $\ln x$ и, следовательно, имеет смысл лишь при $x>0$.

Подставляя (18) в равенство

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q\,(x,\ y)=y^3+\ln x,$$

имеем

$$\ln x+\varphi'(y)=y^3+\ln x,$$

откуда

$$\varphi(y)=\frac{1}{4}y^4+C_1. \qquad (19)$$

Положив, например, $C_1=0$, находим из (18) и (19)

$$U(x,\ y)=y\ln x+\frac{1}{4}y^4.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения имеет вид

$$y\ln x+\frac{1}{4}y^4=C.$$

Второй способ.

$$U(x,\ y)=\int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)}\frac{y}{x}\,dx+(y^3+\ln x)\,dy.$$

Положим, например, $x_0=1$, $y_0=0$. Тогда $P(x,\ y_0)=0$ и

$$U(x,\ y)=\int\limits_0^y(y^3+\ln x)\,dy=\frac{1}{4}y^4+y\ln x. \ ▶$$

Решить дифференциальные уравнения, предварительно убедившись, что они являются уравнениями в полных дифференциалах:

9.96. $(2x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0.$

9.97. $(10xy-8y+1)\,dx+(5x^2-8x+3)\,dy=0.$

9.98. $(3x^2+6xy-2y^2)\,dx+(3x^2-4xy-3y^2)\,dy=0.$

9.99. $\left(y+\frac{2}{x^2}\right)dx+\left(x-\frac{3}{y^2}\right)dy=0.$

9.100. $\frac{3x^2+y}{y^2}\,dx-\frac{2x^3+xy+2y^3}{y^3}\,dy=0.$

9.101. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{1}{y^2}-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)dy=0.$

9.102. $(2x-ye^{-x})\,dx+e^{-x}\,dy=0.$

9.103. $(2x+e^{x/y})\,dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{x/y}\,dy=0.$

9.104. $2x\cos^2 y\,dx+(2y-x^2\sin 2y)\,dy=0.$

9.105. $\left(\sin y-y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+$
$$+\left(x\cos y+\cos x-\frac{1}{y}\right)dy=0.$$

8. Теорема существования и единственности решения. Особые решения. *Задачей Коши* для дифференциального уравнения $y'=f(x,\ y)$

называется задача об отыскании частного решения этого уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Теорема Коши. *Если в дифференциальном уравнении $y'=f(x,\ y)$ функция $f(x,\ y)$ непрерывна в некоторой области D плоскости Oxy и имеет в этой области ограниченную частную производную $f'_y(x,\ y)$, то для любой точки $(x_0,\ y_0)\in D$ в некотором интервале $x_0-h\leqslant x\leqslant$ $\leqslant x_0+h$ существует и притом единственное решение $y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.*

Геометрически это означает, что через каждую точку M области D проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения $y'=f(x,\ y)$.

Точки области D, в которых нарушается единственность решения задачи Коши, называются *особыми точками* дифференциального уравнения.

Решение (интегральная кривая) уравнения $y'=f(x,\ y)$, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением* (*особой интегральной кривой*) этого уравнения. Особое решение не может быть получено из общего ни при каких значениях C (включая и $C=\pm\infty$).

Огибающая семейства интегральных кривых, определяемых общим решением $y=\varphi(x,\ C)$ или общим интегралом $\Phi(x,\ y,\ C)=0$, является особой интегральной кривой. Она находится путем исключения, если это возможно, параметра C из системы двух уравнений

$$\begin{array}{lcl} y=\varphi(x,\ C), & & \Phi(x,\ y,\ C)=0, \\ & \text{или} & \\ 0=\varphi'_C(x,\ C) & & \Phi'_C(x,\ y,\ C)=0. \end{array}$$

Найденную таким путем функцию следует подставить в данное дифференциальное уравнение и убедиться, что она является его решением.

Пример 13. Найти область, в которой уравнение

$$y'=x\sqrt{1-y^2}$$

имеет единственное решение.

◀ Здесь $f(x,\ y)=x\sqrt{1-y^2}$ — функция, непрерывная при $|y|\leqslant 1$; частная производная $f'_y(x,\ y)=-\frac{xy}{\sqrt{1-y^2}}$ ограничена при $|x|\leqslant M$ и $|y|\leqslant a<1$. Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение в любом прямоугольнике $D=\{(x,\ y)\,|\,|x|\leqslant M,\ |y|\leqslant a<$ $<1\}$. ▶

Пример 14. Найти особые решения уравнения

$$y'=\sqrt{1-y^2},$$

зная его общее решение $y=\sin(x+C)$, $|x+C|\leqslant\pi/2$.

◀ Составим систему уравнений

$$\begin{array}{l} y=\sin(x+C), \\ 0=\cos(x+C), \end{array} \qquad |x+C|\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Исключая C, найдем две функции $y=\pm 1$, которые, очевидно, являются решениями данного уравнения и не получаются из общего решения ни при каких значениях C. Следовательно, $y=\pm 1$ — особые решения. ▶

Найти области существования и единственности решения для дифференциальных уравнений:

9.106. $y' = x^2 - y^2$. **9.107.** $y' = \frac{y}{y-x}$.

9.108. $y' = 1 + \operatorname{tg} y$. **9.109.** $y' = x^3 + \sqrt{x - y^3}$.

Найти особые решения следующих дифференциальных уравнений, зная общие решения (там, где это указано).

9.110. $y' = \frac{2\sqrt{y}}{x}$.

9.111. $y' = 4x\sqrt{y-1}$; $y = (x^2 + C)^2 + 1$.

9.112. $xy'^2 + 2xy' - y = 0$; $(y - C)^2 = 4Cx$.

9.113. $y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$; $y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$.

9. **Уравнения, не разрешенные относительно производной.** Пусть дифференциальное уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешимо либо относительно искомой функции, т. е. имеет вид

$$y = f(x, y'), \tag{20}$$

либо относительно аргумента, т. е. записывается в виде

$$x = f(y, y'). \tag{21}$$

Тогда оно интегрируется путем введения параметра $p = y'$. Уравнения (20) и (21) переходят в алгебраические уравнения, дифференцируя которые соответственно по x или по y, получим системы уравнений

$$y = f(x, p), \qquad \text{или} \qquad x = f(y, p),$$
$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} \qquad\qquad \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Из этих систем находится соответственно общее решение уравнения (20) или (21) в явном или параметрическом виде.

Пример 15. Решить уравнение

$$y = y'^2 + xy' - x.$$

◀ Введем параметр $p = y'$. Тогда

$$y = p^2 + x(p - 1). \tag{22}$$

Дифференцируя это равенство по x, получим

$$p = 2p\frac{dp}{dx} + p - 1 + x\frac{dp}{dx},$$

или

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2p + x}.$$

Запишем последнее уравнение в форме

$$\frac{dx}{dp} = x + 2p.$$

Это линейное уравнение, его общее решение:

$$x = Ce^p - 2(p + 1). \tag{23}$$

Подставляя выражение (23) в формулу (22), получим

$$y = Ce^p(p - 1) - p^2 + 2. \tag{24}$$

Система соотношений (23) и (24) определяет общее решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$x = Ce^p - 2(p + 1), \quad y = Ce^p(p - 1) - p^2 + 2. \ ▶$$

Пример 16. Решить уравнение

$$x = y'^2 + \frac{y}{y'}.$$

◀ Полагая $p = y'$, имеем

$$x = p^2 + \frac{y}{p}.$$

Дифференцируем это равенство по y:

$$\frac{1}{p} = 2p\frac{dp}{dy} + \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy},$$

или

$$\frac{dp}{dy}\left(2p - \frac{y}{p^2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$p_1 = C \quad \text{и} \quad p_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}y}.$$

Подставляя поочередно оба результата в выражение для x, найдем общее решение

$$y = Cx - C^3$$

и решение

$$y = \frac{2}{3\sqrt{3}}x^{3/2},$$

которое, как легко убедиться, является особым. ▶

Решить дифференциальные уравнения:

9.114. $y = y'^2 + 4y'^3$. **9.115.** $y = y'\sqrt{1 + y'^2}$.

9.116. $y = (y' - 1)e^{y'}$. **9.117.** $y = \frac{y'^2}{2} + 2xy' + x^2$.

9.118. $x = y'^3 - y' + 2$. **9.119.** $x = y' \cos y'$.

9.120. $x = 2y' - \ln y'$. **9.121.** $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

Частным случаем уравнений вида (20) является так называемое *уравнение Лагранжа*

$$y = xf(y') + \varphi(y'), \tag{25}$$

которое при $f(y') = y'$ называют *уравнением Клеро*. Введением параметра $p = y'$ уравнение (25) приводится к виду

$$y = xf(p) + \varphi(p)$$

в случае общего уравнения Лагранжа и к виду

$$y=xp+\varphi(p)$$

в случае уравнения Клеро.

Уравнение Лагранжа имеет особые решения

$$y=xf(p_0)+\varphi(p_0),$$

где p_0 — любой из корней уравнения $f(p)=p$.

Уравнение Клеро имеет общее решение

$$y=Cx+\varphi(C) \tag{26}$$

и особое решение

$$x=-\varphi'(p), \quad y=-\varphi'(p)\,p+\varphi(p), \tag{27}$$

являющееся огибающей семейства интегральных кривых (26).

Таким образом, можно сформулировать следующее **практическое правило**. Заменив в уравнении Клеро символ y' символом C, мы сразу получаем общее решение (26). Дифференцируя его по C и исключая C из системы двух уравнений (общего решения и результата дифференцирования), получаем особое решение (27).

Пример 17. Решить уравнение Лагранжа

$$y=xy'^2+y'.$$

◀ Полагая $y'=p$, найдем

$$y=xp^2+p.$$

Дифференцируя это равенство по x, получим

$$p=p^2+2xp\frac{dp}{dx}+\frac{dp}{dx},$$

или

$$\frac{dx}{dp}=x\frac{2p}{p-p^2}+\frac{1}{p-p^2}.$$

Это линейное уравнение имеет общее решение

$$x=\frac{1}{(1-p)^2}(C+\ln|p|-p),$$

подставляя которое в формулу для y получаем общее решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$x=\frac{C+\ln|p|-p}{(1-p)^2}, \quad y=\frac{(C+\ln|p|-p)\,p^2}{(1-p)^2}+p.$$

Кроме того, уравнение имеет особые решения $y=0$ и $y=x+1$, соответствующие корням $p_1=0$ и $p_2=1$ уравнения $p^2=p$. ▶

Пример 18. Решить уравнение

$$y=xy'-y'^4.$$

◀ Данное уравнение имеет вид (25) при $f(y')=y'$, т. е. является уравнением Клеро. Следуя практическому правилу, получаем общее решение

$$y=Cx-C^4.$$

Исключая, далее, параметр C из системы уравнений

$$y=Cx-C^4,$$
$$0=x-4C^3,$$

получим особое решение

$$y=\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}x^{4/3}. \ ▶$$

Решить дифференциальные уравнения:

9.122. $y=x\dfrac{1+y'^2}{2y'}$. 9.123. $y=2xy'+\dfrac{1}{y'^2}$.

9.124. $y=xy'^2+y'^3$. 9.125. $y=\frac{1}{2}(xy'+y'\ln y')$.

9.126. $y=xy'-\dfrac{1}{y'}$. 9.127. $y=xy'+y'+\sqrt{y'}$.

9.128. $y=xy'-e^{y'}$. 9.129. $y=xy'+\cos y'$.

10. Смешанные задачи на дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Определить типы дифференциальных уравнений и указать в общем виде методы их решения:

9.130. $\sin x^3=e^{\frac{y'-x^2}{y}}$. 9.131. $\sqrt{x^2-y^3}=\dfrac{2x^2}{y-3x+xy'}$.

9.132. $1+x+(1+x^2)(e^x-e^{2y}y')=0$.

9.133. $2y'(1-x^2)-xy-2xy^2+2x^3y^2=0$.

9.134. $y\,dx+(2x-y^2)\,dy=0$.

9.135. $\left(\dfrac{x}{y}-x+y^2\right)dx+\left(2xy+y-\dfrac{x^2}{2y^2}\right)dy=0$.

9.136. $y\,dx+(x-2\sqrt{xy})\,dy=0$.

9.137. $(x^2+y^2+1)\,dy+xy\,dx=0$.

9.138. $y'=\sin(y-x)$. 9.139. $x=\arccos\dfrac{y'-a^x}{y}$.

9.140. $\sqrt{y}=\dfrac{y'-ye^{x^2\sin x}}{x^2+2x-1}$.

Решить дифференциальные уравнения:

9.141. $y'+xy=x^3$. 9.142. $(x-y)\,dy-y\,dx=0$.

9.143. $(x\cos 2y+1)\,dx-x^2\sin 2y\,dy=0$.

9.144. $y'=y\operatorname{tg}x-y^2\cos x$. 9.145. $y'=\dfrac{1-2x}{y^2}$.

9.146. $2y\,dx+(y^2-6x)\,dy=0$.

9.147. $(xye^{x/y}+y^2)\,dx=x^2e^{x/y}\,dy$.

9.148. $(xy^2+x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0$.

9.149. $(2x^3-xy^2)\,dx+(2y^3-x^2y)\,dy=0$.

9.150. $xy'+y=y^2\ln x$.

9.151. $3x+y-2+y'(x-1)=0$.

9.152. $y' = \frac{x+y}{x-y}$. **9.153.** $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$.

9.154. $(2x + \ln y)\, dx + \left(\frac{x}{y} + \sin y\right) dy = 0$.

9.155. $y = xy' - \ln y'$. **9.156.** $y' = \frac{1}{xy + x^2 y^3}$.

9.157. $\left(x - y \sin \frac{y}{x}\right) dx + x \sin \frac{y}{x}\, dy = 0$.

9.158. $xy' = x^2 e^{-y} + 2$.

9.159. $(2xe^y + y^4)\, y' = ye^y$.

9.160*. $(1 + y^2)\, dx = (\sqrt{1 + y^2} \cos y - xy)\, dy$.

9.161. $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\right) dx - \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy = 0$.

9.162. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\sin^2 x}$. **9.163.** $y = y'^2 + 2xy' + \frac{x^2}{2}$.

9.164*. $(x - 2y^3)\, dx + 3y^2 (2x - y^3)\, dy = 0$.

11. Геометрические и физические задачи, приводящие к решению дифференциальных уравнений 1-го порядка. В задачах геометрии, в которых требуется найти уравнение кривой по заданному свойству ее касательной, нормали или площади криволинейной трапеции, используются геометрическое истолкование производной (угловой коэффициент касательной) и интеграла с переменным пределом (площадь криволинейной трапеции с подвижной ограничивающей ординатой), а также следующие общие формулы для определения длин отрезков касательной t, нормали n, подкасательной s_t и поднормали s_n (рис. 93):

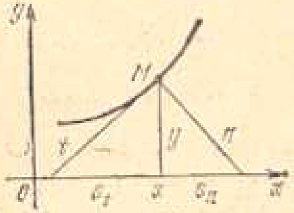


Рис. 93

$$t = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}\right|, \quad n = \left|y\sqrt{1 + y'^2}\right|,$$

$$s_t = \left|\frac{y}{y'}\right|, \quad s_n = |yy'|.$$

Пример 19. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если в каждой ее точке $M(x, y)$ подкасательная s_t в k раз меньше поднормали s_n.

◀ Пусть $y = f(x)$ — уравнение искомой кривой. Используя выражения подкасательной s_t и поднормали s_n, мы сразу получаем дифференциальное уравнение

$$|yy'| = k\left|\frac{y}{y'}\right|,$$

или

$$(y')^2 = k.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая начальное условие $y(0) = 0$, получим искомые уравнения

$$y = \pm\sqrt{k} \cdot x$$

(две прямые). ▶

Пример 20. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1, 1)$, если для любого отрезка $[1, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, в два раза больше произведения координат точки $M(x, y)$ кривой ($x > 0$, $y > 0$).

◀ Согласно условию задачи имеем

$$\int_1^x y(t)\, dt = 2x\, y(x).$$

Дифференцируя это равенство по x, получаем дифференциальное уравнение $y = 2(y + xy')$, или

$$y' = -\frac{y}{2x}.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая начальное условие $y(1) = 1$, найдем уравнение искомой кривой:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}. \ ▶$$

9.165. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(\sqrt{2}, 0)$, если сумма длин ее касательной и подкасательной равна произведению координат точки касания.

9.166. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1, 2)$, если ее подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания.

9.167. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1/2, -1)$, если длина отрезка полуоси абсцисс, отсекаемого ее касательной, равна квадрату абсциссы точки касания.

9.168. Найти уравнения кривых, у которых длина отрезка нормали постоянна и равна a.

9.169. Найти уравнения кривых, у которых поднормаль имеет постоянную длину a.

9.170. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(0, 2)$, если площадь криволинейной трапеции, ограниченной дугой этой кривой, в два раза больше длины соответствующей дуги.

9.171. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1, 1/2)$, если для любого отрезка $[1, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, равна отношению абсциссы x концевой точки к ординате.

9.172. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(0, 3)$, если подкасательная в любой точке равна сумме абсциссы точки касания и расстояния от начала координат до точки касания $\left(\text{ограничиться рассмотрением случая } \frac{y}{y'} > 0\right)$.

9.173. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 0), если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого ее нормалью, на 2 больше абсциссы точки касания.

9.174. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если для любого отрезка $[a, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, равна кубу ординаты концевой точки дуги.

9.175. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с полярными координатами $r = 2$, $\varphi = 0$, если угол α между ее касательной и радиус-вектором точки касания есть постоянная величина: $\operatorname{tg} \alpha = a$.

9.176. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 1), если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого любой ее касательной, равна длине этой касательной.

9.177. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (3, 1), если длина отрезка, отсекаемого любой ее касательной на оси ординат, равна поднормали.

9.178. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если середина отрезка ее нормали от любой точки кривой до оси Ox лежит на параболе $2y^2 = x$.

9.179. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 0), если площадь трапеции, образованной касательной, осями координат и ординатой точки касания, постоянна и равна 3/2.

9.180. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0, 1), если площадь треугольника, образуемого осью абсцисс, касательной и радиус-вектором точки касания, постоянна и равна 1.

9.181. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 2), если произведение абсциссы точки касания на абсциссу точки пересечения нормали с осью Ox равно удвоенному квадрату расстояния от начала координат до точки касания.

9.182. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с полярными координатами $r = \pi$, $\varphi = \pi/2$, если площадь сектора, ограниченного этой кривой, полярной осью и переменным полярным радиусом, в шесть раз меньше куба полярного радиуса.

Ортогональными траекториями для однопараметрического семейства S_1 линий $y = \Phi(x, a)$ называется другое семейство S_2 линий, которые пересекают линии первого семейства под прямым углом.

П р и м е р 21. Найти ортогональные траектории семейства кубических парабол $y = ax^3$.

◀ Найдем дифференциальное уравнение данного семейства, исключая a из системы уравнений

$$y = ax^3,$$
$$y' = 3ax^2.$$

Получим $y' = 3y/x$. Дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий есть

$$y' = -\frac{x}{3y}.$$

Его общий интеграл

$$x^2 + 3y^2 = C^2$$

является уравнением семейства ортогональных траекторий (эллипсов). ▶

Найти ортогональные траектории данных семейств кривых (a — параметр):

9.183. $ay^2 = x^3$. **9.184.** $y = ax^2$.

9.185. $x^2 - 2y^2 = a^2$. **9.186.** $y = ae^{2x}$.

При составлении дифференциальных уравнений 1-го порядка в физических задачах часто применяется *метод дифференциалов*, по которому приближенные соотношения между малыми приращениями величин заменяются соотношениями между их дифференциалами. Такая замена не отражается на результатах, так как дело сводится к отбрасыванию бесконечно малых высших порядков. Другим методом составления дифференциальных уравнений является использование физического смысла производной как скорости протекания процесса.

П р и м е р 22. В резервуаре первоначально содержится A кг вещества, растворенного в B литрах воды. Затем каждую минуту в резервуар поступает M литров воды и вытекает N литров раствора ($M > N$), причем однородность раствора достигается путем перемешивания. Найти массу вещества в резервуаре через T минут после начала процесса.

◀ Обозначим через $x(t)$ массу вещества в резервуаре через t минут после начала процесса и через $(x + \Delta x)$ — в момент времени $(t + \Delta t)$. Заметим, что $\Delta x < 0$ при $\Delta t > 0$ (т. е. раствор «обедняется»).

Пусть $V(t)$ — объем смеси в момент t:

$$V(t) = B + Mt - Nt.$$

Концентрация вещества в момент времени t равняется, очевидно, x/V. За бесконечно малый отрезок времени $[t, t + \Delta t]$ масса вещества изменяется на бесконечно малую величину Δx, для которой справедливо приближенное равенство

$$\Delta x \approx -\frac{x}{V} N \Delta t = -\frac{Nx}{B + (M - N)t} \Delta t.$$

Заменяя приращения Δx и Δt дифференциалами dx и dt, получаем дифференциальное уравнение:

$$dx = -\frac{Nx}{B + (M - N)t} dt.$$

Интегрируя это уравнение с разделяющимися переменными и считая

$M > N$, найдем общее решение:

$$x(t) = \frac{C}{(B+(M-N)t)^{\frac{N}{M-N}}}.$$

Используя начальное условие $x=A$ при $t=0$, найдем частное решение:

$$x(t) = A\left(\frac{B}{B+(M-N)t}\right)^{\frac{N}{M-N}}.$$

Полагая $t=T$, получим ответ:

$$x(T) = A\left(\frac{B}{B+(M-N)T}\right)^{\frac{N}{M-N}}.$$

Случай $M=N$ требует отдельного рассмотрения (см. задачу 9.195). ▶

9.187. Скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей его среды (закон Ньютона). Найти зависимость температуры T от времени t, если тело, нагретое до T_0 градусов, внесено в помещение, температура которого постоянна и равна a градусам.

9.188. Через сколько времени температура тела, нагретого до 100 °C, понизится до 25 °C, если температура помещения равна 20 °C и за первые 10 мин тело охладилось до 60 °C?

9.189*. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начавший вращаться со скоростью 5 об/с, по истечении двух минут вращается со скоростью 3 об/с. Через сколько времени он будет иметь угловую скорость 1 об/с?

9.190. Скорость распада радия пропорциональна наличному его количеству. В течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

9.191*. Скорость истечения воды из сосуда через малое отверстие определяется формулой $v=0,6\sqrt{2gh}$, где h — высота уровня воды над отверстием, g — ускорение свободного падения (принять $g=10$ м/с²). За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака с диаметром $2R=1$ м и высотой $H=1,5$ м через отверстие в дне диаметром $2r=0,05$ м?

9.192*. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Зная, что при прохождении слоя воды толщиной 2 м поглощается 1/3 первоначального светового потока, найти, какая часть его дойдет до глубины 12 м.

9.193. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/с, скорость ее через 4 секунды 1 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 см/с? Какой путь пройдет лодка до остановки?

9.194*. Пуля, двигаясь со скоростью $v_0=400$ м/с, пробивает стену толщиной $h=20$ см и вылетает, имея скорость 100 м/с. Полагая силу сопротивления стены пропорциональной квадрату скорости движения пули, найти время прохождения пули через стену.

9.195. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак вливается вода со скоростью 5 л/мин, и смесь вытекает из него с той же скоростью. Однородность раствора достигается путем перемешивания. Сколько соли останется в баке через час?

9.196. Некоторое вещество преобразуется в другое вещество со скоростью, пропорциональной массе непреобразованного вещества. Если масса первого есть 31,4 г по истечении одного часа и 9,7 г по истечении трех часов, то определить: а) массу вещества в начале процесса; б) через сколько времени после начала процесса останется лишь 1% первоначальной массы исходного вещества?

9.197*. В помещении цеха вместимостью 10 800 м³ воздух содержит 0,12% углекислоты. Вентиляторы доставляют свежий воздух, содержащий 0,04% углекислоты, со скоростью 1500 м³/мин. Предполагая, что углекислота распределяется по помещению равномерно в каждый момент времени, найти объемную долю углекислоты через 10 мин после начала работы вентиляторов.

9.198. Сила тока i в цепи с сопротивлением R, самоиндукцией L и напряжением u удовлетворяет уравнению

$$L\frac{di}{dt}+Ri=u.$$

Найти силу тока i в момент времени t, если $u=E\sin\omega t$ и $i=0$ при $t=0$ (L, R, E, ω — постоянные).

§ 2. Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Основные понятия. Теорема Коши. Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0 \tag{1}$$

или

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Задачей Коши для дифференциального уравнения (2) называется задача отыскания решения $y(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{3}$$

Общим решением уравнения (1) или (2) называется такая функция $y=\varphi(x,\ C_1,\ \ldots,\ C_n)$, которая при любых допустимых значениях параметров $C_1,\ \ldots,\ C_n$ является решением этого дифференциального уравнения и для любой задачи Коши с условиями (3) найдутся постоянные $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$, определяемые из системы уравнений:

$$\begin{gathered} y_0=\varphi(x_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_n), \\ y_0'=\varphi'(x_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_n). \end{gathered}$$

Уравнение

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ \ldots,\ C_n)=0, \tag{4}$$

определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. *Если дифференциальное уравнение (2) такого, что функция $f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ в некоторой области D изменения своих аргументов непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y'},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то для любой точки $(x_0,\ y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_n^{(n-1)})\in D$ существует такой интервал $x_0-h<x<x_0+h$, на котором существует и притом единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям* (3).

Пример 1. Показать, что функция $y=C_1e^{C_2x}$, $C_1,\ C_2\in R$, является решением дифференциального уравнения $yy''=y'^2$.

◀ Имеем:

$$y'=C_1C_2e^{C_2x},\quad y''=C_1C_2^2e^{C_2x}.$$

Подставив выражения y, y' и y'' в данное уравнение, получим тождество

$$C_1e^{C_2x}\cdot C_1C_2^2e^{C_2x}=(C_1C_2e^{C_2x})^2.$$

Следовательно, функция $y=C_1e^{C_2x}$ есть решение данного уравнения. ▶

Пример 2. Найти область существования и единственности решения уравнения

$$y''=\frac{y\sqrt{y'}}{x}.$$

◀ Функция $f(x,\ y,\ y')=\frac{y\sqrt{y'}}{x}$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sqrt{y'}}{x}$ непрерывны при $x\neq0$, $y'\geqslant0$; частная производная $\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y}{2x\sqrt{y'}}$ непрерывна при $x\neq0$, $y'>0$.

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение при $x\neq0$, $y'>0$. ▶

Найти область существования и единственности решения уравнений:

9.199. $y''=x+\sqrt{x^2-y'}$. 9.200. $y''=y'\ln y'$.

Показать, что данные выражения при любых действительных значениях входящих в них параметров определяют решения соответствующих дифференциальных уравнений:

9.201. $y=x\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt+\cos x+C_1x+C_2$; $xy''=\sin x$.

9.202. $y=x^2\ln x+C_1x^2+C_2x+C_3$; $xy'''=2$.

9.203. $e^y\sin^2(C_1x+C_2)=2C_1^2$; $y''=e^y$.

9.204. $C_1y=\sin(C_1x+C_2)$; $yy''+1=y'^2$.

Показать, что данные функции являются частными решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

9.205. $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$; $1+y'^2=2yy''$.

9.206. $y=e^x$; $y^2+y'^2=2yy''$.

Путем исключения параметров вывести дифференциальные уравнения семейств следующих линий:

9.207. Прямых на плоскости, не параллельных оси Oy.

9.208. Окружностей постоянного радиуса R.

9.209. Синусоид $y=A\sin(x+\alpha)$, где A и α — параметры.

9.210. Парабол с осью, параллельной оси Oy.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка. Ниже приводятся некоторые виды дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка.

а) Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$. Общее решение получается путем n-кратного интегрирования $y=\int dx\int dx\ldots\int f(x)\,dx+P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)=C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n$, или по формуле

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}f(t)(x-t)^{n-1}\,dt+P_{n-1}(x).$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''=\frac{1}{\cos^2x}$ и его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

◀ Интегрируя первый раз, получаем $y'=\operatorname{tg}x+C_1$. Повторное интегрирование дает $y=-\ln|\cos x|+C_1x+C_2$. Это и есть общее решение. Подставив теперь в полученное общее решение и в выражение для первой производной $x=\frac{\pi}{4}$ и соответственно $y=\frac{\ln 2}{2}$ и $y'=1$, получим систему двух уравнений с неизвестными C_1 и C_2. Решив эту систему, найдем значения параметров $C_1=0$ и $C_2=0$, соответствующие искомому частному решению, которое, следовательно, имеет вид $y=-\ln|\cos x|$. ▶

б) Уравнения вида $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)})=0$, т. е. уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно. С помощью замены $y^{(k)}=p(x)$ порядок уравнения понижается на k единиц: $F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)})=0$. Предположим, что для полученного уравнения мы можем найти общее решение $p(x)=\varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$. Тогда искомая функция $y(x)$ получается путем k-кратного интегрирования функции $\varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$.

Пример 4. Найти частное решение уравнения $x^4y'''+2x^3y''=1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=\frac{1}{2}$, $y'(1)=\frac{1}{2}$, $y''(1)=-1$.

◀ Данное уравнение не содержит y и y'. Положим $y''=p$, тогда $y'''=\frac{dp}{dx}$, и уравнение принимает вид $x^4\frac{dp}{dx}+2x^3p=1$, или $\frac{dp}{dx}+\frac{2}{x}p=\frac{1}{x^4}$. Это линейное уравнение первого порядка. Его общее решение $p=-\frac{1}{x^3}+\frac{C_1}{x^2}$. Используя начальное условие $y''(1)=p(1)=-1$, получаем $C_1=0$. Следовательно, $y''=-\frac{1}{x^3}$, откуда $y'=\frac{1}{2x^2}+C_2$. Начальное условие $y'(1)=1/2$ позволяет определить $C_2=0$. Интегрируя еще раз, получаем $y=-\frac{1}{2x}+C_3$, а из условия $y(1)=1/2$ следует, что $C_3=1$. Итак, искомое частное решение есть $y=1-\frac{1}{2x}$ (равносторонняя гипербола). ▶

в) Уравнения вида $F(y, y', \ldots, y^{(n)})=0$, не содержащие явно независимой переменной. Подстановкой $y'=p(y)$, $y''=p\frac{dp}{dy}$, $y'''=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}$ и т. д. порядок уравнения понижается на единицу.

Пример 5. Найти общий интеграл уравнения $y'y'''-3y''^2=0$.

◀ Положим $y'=p(y)$, $y''=p\frac{dp}{dy}$, $y'''=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}$. Тогда уравнение преобразуется к виду

$$p\left(p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}\right)-3p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2=0.$$

Приведя подобные члены и сократив на p^2 (при этом следует учесть теряемое решение $p=0$, или $y=c$), получим

$$p\frac{d^2p}{dy^2}-2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2=0.$$

Положив здесь $\frac{dp}{dy}=z$, $\frac{d^2p}{dy^2}=z\frac{dz}{dp}$, придем к уравнению

$$pz\frac{dz}{dp}-2z^2=0.$$

Сократив на z $\left(\text{при этом следует учесть еще одно решение } z=\frac{dp}{dy}=0,\ \text{т. е. } p=C_1 \text{ и } y=C_1x+C_2\right)$, получим $\frac{dz}{z}-\frac{2dp}{p}=0$, откуда $\ln|z|-\ln p^2=\ln|C_1|$, или $z=\frac{dp}{dy}=C_1p^2$. Интегрируя последнее уравнение, находим

$$-\frac{1}{p}=C_1y+C_2, \quad \text{или} \quad -\frac{dx}{dy}=C_1y+C_2.$$

Окончательно получим $x=\overline{C}_1y^2+C_2y+C_3$, где $\overline{C}_1=-\frac{C_1}{2}$, $\overline{C}_2=-C_2$, т. е. семейство парабол. Заметим, что в общее решение входят потерянные ранее частные решения. ▶

г) Уравнения вида $\frac{d}{dx}G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})=0$, т. е. такие уравнения, в которых левая часть может быть представлена как полная производная по x от некоторой функции $G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Интегрируя по x, получим новое уравнение, порядок которого на единицу ниже порядка исходного уравнения.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$(1+x^2)y''+2xy'=x^3.$$

◀ Левая часть уравнения есть полная производная по x от функции $(1+x^2)y'$, а правая — от функции $\frac{x^4}{4}$, т. е. уравнение можно переписать так: $((1+x^2)y')'=\left(\frac{x^4}{4}\right)'$. Отсюда интегрированием получаем $(1+x^2)y'=\frac{x^4}{4}+\frac{C_1}{4}$, или

$$dy=\frac{x^4+C_1}{4(1+x^2)}dx.$$

Следовательно,

$$y=\int\frac{x^4+C_1}{4(1+x^2)}dx=\int\left(\frac{1}{4}(x^2-1)+\frac{C_1+1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

и, окончательно,

$$y=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x+\overline{C}_1\operatorname{arctg}x+C_2,$$

где $\overline{C}_1=\frac{C_1+1}{4}$. Это и есть общее решение. ▶

д) Уравнение $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$, однородное относительно функции и ее производных, т. е. такое, что $F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)})=t^kF(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, $t\neq0$. Подстановкой $y'=yz$ порядок уравнения понижается на единицу.

Пример 7. Найти общее решение уравнения $xyy''-xy'^2-yy'=0$.

◀ Положим $y'=yz$. Тогда $y''=y(z^2+z')$ и уравнение принимает вид

$$xy^2(z^2+z')-xy^2z^2-y^2z=0.$$

Сокращая на y^2 (при этом получается решение $y=0$), находим $xz'-z=0$, или $\frac{dz}{z}-\frac{dx}{x}=0$, откуда $z=C_1x$. Так как $z=\frac{y'}{y}$, то приходим к уравнению $y'=C_1xy$, или $\frac{dy}{y}=C_1x\,dx$, откуда $\ln|y|=\frac{C_1x^2}{2}+\ln|C_2|$, или $y=C_2e^{\overline{C_1}x^2}$, где $\overline{C_1}=C_1/2$. Это и есть общее решение, которое содержит и потерянное частное решение $y=0$. ▶

В некоторых случаях найти решение в виде явной или неявной функции затруднительно однако удается получить решение в параметрической форме.

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y''(1+2\ln y')=1$.

◀ Положим $y'=p$, $y''=\frac{dp}{dx}$. Тогда уравнение примет вид $\frac{dp}{dx}(1+2\ln p)=1$, или $dx=(1+2\ln p)\,dp$, откуда $x=-p+2p\ln p+C_1$. Так как $dy=p\,dx$, то находим $dy=p(1+2\ln p)\,dp$, откуда $y=p^2\ln p+C_2$, и получаем общее решение в параметрическом виде:

$$x=p(-1+2\ln p)+C_1,\quad y=p^2\ln p+C_2.\ ▶$$

Решить дифференциальные уравнения, используя методы понижения порядка:

9.211. $y''=\frac{1}{1+x^2}$. **9.212.** $y''=x+\sin x$.

9.213. $y^{IV}=1/x$. **9.214.** $xy'''=2x+3$.

9.215. $x^2y''=y'^2$. **9.216.** $y''-2yy'=0$.

9.217. $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$.

9.218. $xy''-y'=e^xx^2$. **9.219.** $2yy''=1+y'^2$.

9.220. $yy''+y'^2=y'^3$.

9.221. $y''+2xy'^2=0$. **9.222.** $xy''-y'-x\sin\frac{y'}{x}=0$.

9.223. $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$. **9.224.** $x^3y''+x^2y'-1=0$.

9.225. $(1-x^2)y''+xy'-2=0$. **9.226.** $(1+e^x)y''+y'=0$.

9.227. $y'''=2(y''-1)\operatorname{ctg}x$. **9.228.** $x^2y'''=y''^2$.

9.229. $y'''=y''^3$. **9.230.** $(2y+y')y''=y'^2$.

9.231. $y''=1/\sqrt{y}$. **9.232.** $y^3y''+1=0$.

9.233. $yy''+y-y'^2=0$. **9.234.** $yy''-2yy'\ln y-y'^2=0$.

9.235. $y''\operatorname{tg}y=2y'^2$. **9.236.** $(y-1)y''=2y'^2$.

9.237. $xy'''+y''-x-1=0$. **9.238.** $yy''+y'^2=x$.

9.239. $y''=\frac{y-xy'}{x^2}$. **9.240.** $\frac{y'^2-y'y'''}{y''^2}=\frac{1}{x^2}$.

9.241*. $x^2yy''=(y-xy')^2$.

9.242. $xy'(yy''-y'^2)-yy'^2=x^4y^3$.

9.243. $xyy''+xy'^2=2yy'$. **9.244.** $2yy''-3y'^2=4y^2$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

9.245. $y''=xe^x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

9.246. $y'''=\frac{\ln x}{x^2}$, $y(1)=0$, $y'(1)=1$, $y''(1)=2$.

9.247. $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}$, $y(2)=0$, $y'(2)=4$.

9.248. $(1+x^2)y''+y'^2+1=0$, $y(0)=y'(0)=1$.

9.249. $y''=e^{2y}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

9.250. $y''\cos y+y'^2\sin y-y'=0$, $y(-1)=\pi/6$, $y'(-1)=2$.

9.251. $y''/y'=2yy'/(1+y^2)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

9.252. $yy''-y'^2=y^4$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

9.253. $yy''=2xy'^2$, $y(2)=2$, $y'(2)=0{,}5$.

9.254. $2yy''+y^2-y'^2=0$, $y(0)=y'(0)=1$.

9.255. Найти интегральную кривую уравнения $yy'y''=y'^2+y''^2$, касающуюся в начале координат прямой $x+y=0$.

9.256. Найти интегральную кривую уравнения $yy''+y'^2-1=0$, проходящую через точку $M_0(0,1)$ и касающуюся в этой точке прямой $x+y=1$.

Найти общие решения дифференциальных уравнений в параметрической форме:

9.257. $(x+2y')y''=1$. **9.258.** $y''^2-2y'y''+3=0$.

9.259. $(2+y')e^{y'}y''=1$. **9.260.** $(3y-2y')y''-y'^2=0$.

9.261. Найти уравнение кривой, касающейся оси абсцисс в начале координат, если ее кривизна в любой точке равна $\cos x$ $(-\pi/2<x<\pi/2)$.

9.262. Найти уравнения кривых, у которых радиус кривизны в любой точке равен длине отрезка нормали, заключенного между этой точкой и осью абсцисс, если кривая:

а) вогнута вверх; б) вогнута вниз.

9.263*. Найти уравнения кривых, у которых радиус кривизны в любой точке вдвое больше длины отрезка нормали, заключенного между этой точкой и осью абсцисс, если известно, что кривая:

а) вогнута вверх; б) вогнута вниз.

9.264. Найти форму гибкой однородной нерастяжимой нити с закрепленными концами, находящуюся в равновесии под действием силы тяжести, если линейная плотность нити равна q (горизонтальная проекция силы натяжения нити $H = \mathrm{const}$). Расположить нить так, чтобы вершина кривой совпадала с точкой $(a, 0)$, где $a = H/qg$.

9.265. Гибкая тяжелая однородная нерастяжимая нить в положении равновесия подвергается натяжению, пропорциональному переменной площади ее поперечного сечения. Найти форму нити, если линейная плотность нити равна q (горизонтальная проекция силы натяжения нити $H = \mathrm{const}$). Расположить нить так, чтобы кривая проходила через начало координат и имела в ней горизонтальную касательную.

9.266. Тело массы m движется прямолинейно под действием постоянной силы F. Найти скорость движения тела и пройденный им путь как функции времени, если в начальный момент они оба равны нулю, а сопротивление среды пропорционально квадрату скорости.

9.267*. Мяч массы 400 г падает с высоты 16,7 м без начальной скорости. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости мяча и равно 0,0048 Н при скорости 1 м/с. Вычислить время падения и скорость мяча в конце падения. Принять $g = 10$ м/с^2.

9.268. Тело массы m поднимается вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Полагая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости тела (коэффициент пропорциональности $k > 0$), найти высоту подъема тела и скорость, с которой оно вернется в исходное положение, а также время подъема и спуска тела.

9.269*. Мяч массы 400 г брошен вверх со скоростью 20 м/с. Вычислить время подъема мяча и наибольшую высоту подъема, если сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости мяча (коэффициент пропорциональности $k > 0$), причем оно равно 0,0048 Н при скорости 1 м/с. Принять $g = 10$ м/с^2.

9.270. Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы m под действием отталкивающей силы, обратно пропорциональной кубу расстояния от точки до неподвижного центра (коэффициент пропорциональности $k > 0$). В начальный момент точка находится в покое и отстоит от центра на расстоянии x_0.

9.271. Материальная точка массы m движется прямолинейно к неподвижному центру, притягивающему ее с силой, обратно пропорциональной кубу расстояния от центра (коэффициент пропорциональности $k > 0$). Найти закон движения, если оно начинается с состояния покоя, когда точка отстоит от центра на расстоянии x_0. Определить время, по истечении которого точка достигнет центра.

9.272. Ракета движется вертикально вверх под действием силы отдачи от истечения газов. Масса ракеты изменяется в зависимости от времени по закону $m = m_0\varphi(t)$, где $m_0 = \mathrm{const}$ (закон сгорания топлива). Относительная скорость истечения газов постоянна и равна u_0. Начальная скорость ракеты у поверхности Земли равна нулю. Найти высоту подъема ракеты как функцию времени, если сопротивление воздуха не учитывается. Рассмотреть также частный случай, когда $m = m_0(1 - \alpha t)$, и вычислить для этого случая, на какую высоту поднимается ракета через 10 с, 30 с и 50 с при $u_0 = 2000$ м/с и $\alpha = 0{,}01$ с$^{-1}$. Положить $g = 9{,}8$ м/с^2.

9.273. Определить, через сколько времени упадет на Землю тело, притягиваемое Землей по закону Ньютона (с ускорением, обратно пропорциональным квадрату расстояния между ними), если в начальный момент скорость тела равна нулю, а расстояние его от центра Земли равно H. Сопротивлением атмосферы пренебречь. Ускорение свободного падения на поверхности Земли постоянно и равно g.

9.274*. Тело, находящееся от центра Земли на расстоянии $x_Л = 60{,}27\ R_З$ (что соответствует расстоянию от Луны до Земли), падает на Землю из состояния покоя под действием силы тяжести с ускорением, обратно пропорциональным квадрату его расстояния от центра Земли. Пренебрегая сопротивлением атмосферы, определить, через сколько времени оно упадет на Землю. Принять $R_З = 6{,}377 \cdot 10^6$ м, $g = 9{,}8$ м/с^2.

9.275. Определить скорость, с которой метеор ударяется о Землю, если он падает с неограниченно большого расстояния из состояния покоя и если при его движении к Земле ускорение принимается обратно пропорциональным квадрату его расстояния от центра Земли. Принять радиус Земли $R_З = 6377$ км, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

9.276. По оси Oy в положительном направлении движется с постоянной скоростью v точка A (цель). На плоскости Oxy движется точка M (преследователь) с постоянной скоростью u $(u > v)$ так, что вектор скорости всегда направлен в точку A. Найти траекторию точки M (кривую погони), если в начальный момент времени $t = 0$ точка A находилась в начале координат, а точка M — на оси Ox на расстоянии $a > 0$ от цели.

9.277*. Балка длины l, лежащая концами на двух опорах, находится под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q. Найти уравнение изогнутой оси балки и ее максимальный прогиб, выбрав начало координат в середине ненагруженной балки.

9.278*. Балка длины l, заделанная правым концом в стену, изгибается силой F, приложенной к левому концу, и равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q. Найти уравнение изогнутой оси балки и ее максимальный прогиб.

9.279*. Балка длины l с заделанным левым концом изгибается под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q. Какова должна быть приложенная к правому концу балки действующая вверх сила F, чтобы прогиб в правом конце балки был равен нулю?

3. Линейные однородные уравнения. Уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=0 \qquad (5)$$

называется *линейным однородным* дифференциальным уравнением n-го порядка. Если известно какое-либо частное решение $y_1(x)$ уравнения (5), то подстановка $y(x)=y_1(x)\,z(x)$ приводит это уравнение к линейному уравнению относительно функции $z(x)$, не содержащему явно эту функцию. Поэтому, полагая $z'(x)=u(x)$, получим линейное однородное уравнение порядка $n-1$ относительно функции $u(x)$.

Пример 9. Найти общее решение уравнения

$$(x^2+1)\,y''-2xy'+2y=0,$$

убедившись в том, что функция $y_1(x)=x$ есть одно из его частных решений.

◀ Так как $y_1'(x)=1$, а $y_1''(x)=0$, то, подставив выражения $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_1''(x)$ в заданное уравнение, убеждаемся в том, что функция $y_1(x)=x$ действительно является его частным решением. Положим $y=xz$, найдем $y'=xz'+z$, $y''=xz''+2z'$ и подставим выражения y, y' и y'' в уравнение. Получим

$$(x^2+1)(xz''+2z')-2x(xz'+z)+2xz=0,$$

или

$$x(x^2+1)\,z''+2z'=0.$$

Теперь, полагая $z'=u$, $z''=u'$, приходим к уравнению первого порядка относительно u:

$$x(x^2+1)\,u'+2u=0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение имеет вид

$$u=C_1\frac{x^2+1}{x^2},$$

откуда, учитывая $u=z'$, получаем уравнение первого порядка относительно z:

$$dz=C_1\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим $z=C_1\left(x-\frac{1}{x}\right)+C_2$, а так как $y=xz$, то окончательно получаем общее решение исходного уравнения

$$y=C_1(x^2-1)+C_2x. ▶$$

Изложенный выше метод обобщается на случай, когда известно k частных линейно независимых решений уравнения (5). В этом случае путем надлежащих подстановок порядок уравнения может быть понижен на k единиц.

9.280. Доказать теорему: если $y_1(x)$ есть частное решение линейного однородного уравнения $y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0$, то функция $y_2(x)=y_1(x)\int e^{-\int p(x)\,dx}\frac{dx}{y_1^2(x)}$ тоже является решением этого уравнения, а функция $y=y_1(x)\left(C_1+C_2\int e^{-\int p(x)\,dx}\frac{dx}{y_1^2(x)}\right)$ есть его общее решение.

9.281. Найти общее решение уравнения $y''-6y'+5y=0$, если функция e^x есть его частное решение.

9.282. Найти общее решение уравнения $y''-2y'-3y=0$, если функция e^{-x} есть его частное решение.

9.283. Найти общее решение уравнения $xy''+2y'+xy=0$, если функция $\frac{\sin x}{x}$ есть его частное решение.

9.284. Найти общее решение уравнения $(1-x^2)\,y''-2xy'+2y=0$, если функция x есть его частное решение.

9.285. Найти общее решение уравнения $x^3y'''+5x^2y''+2xy'-2y=0$, если известны два его частных решения $y_1=x$ и $y_2=1/x$.

Определителем Вронского (вронскианом) системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называется определитель

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}.$$

Если система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ линейно зависима на интервале (a, b), то ее вронскиан равен нулю всюду на этом интервале. Если же хотя бы в одной точке $x_0\in(a, b)$ имеем $W(x_0)\neq 0$, то система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ линейно независима на (a, b).

Всякая система из n линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ уравнения (5) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения. Вронскиан фундаментальной системы решений отличен от нуля на всем интервале, где эти решения определены (см. задачу 9.304). Если известна фундаментальная система решений уравнения (5), то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x),$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Пример 10. Дана система функций x, $\cos x$, $\sin x$. Найти вронскиан системы $W(x)$ и убедиться в том, что на некотором интервале система линейно независима. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система функций является фундаментальной системой решений, и записать общее решение уравнения.

◀ Составим вронскиан

$$W(x)=\begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}.$$

Так как $W(x)=x$, то система линейно независима на всей оси Ox, за исключением точки $x=0$, и следовательно, образует фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения 3-го порядка в области $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, общим решением которого является функция $y=C_1x+C_2\cos x+C_3\sin x$. Для составления дифференциального уравнения найдем производные y', y'', y''' и исключим произвольные постоянные из выражений для y, y', y'', y'''. Имеем:

$$\begin{aligned} y &= C_1x+C_2\cos x+C_3\sin x, \\ y' &= C_1-C_2\sin x+C_3\cos x, \\ y'' &= -C_2\cos x-C_3\sin x, \\ y''' &= C_2\sin x-C_3\cos x. \end{aligned}$$

Легко видеть, что, умножив первое и третье равенство на -1, а второе и четвертое на x и сложив все четыре равенства, получим

$$xy'''-y''+xy'-y=0. \tag{6}$$

Уравнение (6) можно было получить и другим путем, если учесть, что решение y искомого уравнения вместе с функциями x, $\cos x$, $\sin x$ образует линейно зависимую систему и поэтому вронскиан системы функций y, x, $\cos x$, $\sin x$ равен нулю:

$$\begin{vmatrix} y & x & \cos x & \sin x \\ y' & 1 & -\sin x & \cos x \\ y'' & 0 & -\cos x & -\sin x \\ y''' & 0 & \sin x & -\cos x \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим то же самое уравнение (6) (проверить!).

Деля обе части уравнения (6) на x, получаем

$$y'''-\frac{1}{x}y''+y'-\frac{1}{x}y=0. \tag{7}$$

Уравнение (7) и является искомым линейным однородным дифференциальным уравнением. ▶

Исследовать на линейную зависимость следующие системы функций:

9.286. x, $\ln x$. **9.287.** $\sin 2x$, $\sin x\cos x$.

9.288. e^{-x}, xe^{-x}. **9.289.** x, $2x$, x^3.

9.290. e^x, xe^x, x^2e^x. **9.291.** $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$.

9.292. $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$. **9.293.** e^x, e^{x+1}.

9.294. x, 0, e^x. **9.295.** 1, $\sin x$, $\cos 2x$.

Зная фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения, составить это уравнение:

9.296. 1, e^{-x}. **9.297.** $e^{2x}\cos x$, $e^{2x}\sin x$.

9.298. x^3, x^4. **9.299.** 1, x, e^x.

9.300. 1, $\sin x$, $\cos x$. **9.301.** $2x$, $x-2$, e^x+1.

9.302. e^{3x}, e^{x}. **9.303.** e^{2x}, $\sin x$, $\cos x$.

9.304.** Доказать, что если $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ — решения линейного однородного дифференциального уравнения порядка n с непрерывными в некотором интервале (a, b) коэффициентами и вронскиан $W(x)$ этой системы равен нулю при $x_0\in(a, b)$, то $W(x)\equiv 0$ при $a<x<b$.

9.305*. Дана система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, причем на некотором интервале вронскиан $W(x)$ этой системы отличен от нуля. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система является фундаментальной системой решений.

9.306. Зная фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения e^x, $\cos x$, $\sin x$, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=3$, $y'(0)=4$, $y''(0)=-1$.

9.307. Зная фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения e^x, e^{2x}, e^{3x}, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=6$, $y'(0)=14$, $y''(0)=36$.

4. Линейные неоднородные уравнения. Уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \tag{8}$$

в котором $f(x)\not\equiv 0$, называется *линейным неоднородным* дифференциальным уравнением n-го порядка.

Общее решение уравнения (8) определяется формулой

$$y(x)=y_0(x)+\bar{y}(x), \tag{9}$$

где $y_0(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения (5), а $\bar{y}(x)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (8).

Пример 11. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение $xy'''-y''+xy'-y=2x^3$.

Известно, что функция x^3 есть его частное решение. Требуется найти общее решение этого уравнения.

◀ Согласно формуле (9) общее решение неоднородного уравнения составляется как сумма общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $\bar{y}(x)$ неоднородного уравнения. В нашем случае $y_0(x)=C_1x+C_2\cos x+C_3\sin x$ (см. пример 10), а $\bar{y}(x)=x^3$. Следовательно, искомое общее решение есть $y=C_1x+C_2\cos x+C_3\sin x+x^3$. ▶

Если известно общее решение $y_0(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ соответствующего уравнению (8) однородного уравнения (5), то для определения частного решения $\bar{y}(x)$ уравнения (8) можно воспользоваться методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Именно, будем искать частное решение неоднородного уравнения (8) в виде $\bar{y}(x)=C_1(x)y_1(x)+\ldots+C_n(x)y_n(x)$, где от функций $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ дополнительно потребуем, чтобы они удовлетворяли условиям $\sum\limits_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(k)}\dfrac{dC_\nu(x)}{dx}=0$ для всех $k=0, 1, \ldots, n-2$ (где $y_\nu^{(0)}=y_\nu$). Тогда для функций $C_\nu(x)$, $\nu=1, 2, \ldots, n$, получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n\frac{dC_n}{dx}=0,\\
&y_1'\frac{dC_1}{dx}+y_2'\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n'\frac{dC_n}{dx}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_1^{(n-1)}\frac{dC_1}{dx}+y_2^{(n-1)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n^{(n-1)}\frac{dC_n}{dx}=f(x).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Определитель этой системы есть отличный от нуля вронскиан фундаментальной системы решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, поэтому система имеет единственное решение относительно $\dfrac{dC_\nu}{dx}$, $\nu=1, 2, \ldots, n$.

Пример 12. Зная, что функции $y_1(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ и $y_2(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$ (см. задачу 9.283), найти общее решение уравнения

$$xy''+2y'+xy=x. \tag{11}$$

◀ Общее решение соответствующего однородного уравнения записывается в виде $y_0(x)=C_1\dfrac{\cos x}{x}+C_2\dfrac{\sin x}{x}$. Считая C_1 и C_2 функциями x, для определения частного решения уравнения (11) составим систему вида (10):

$$
\begin{aligned}
&C_1'(x)\frac{\cos x}{x}+C_2'(x)\frac{\sin x}{x}=0,\\
&C_1'(x)\left(\frac{\cos x}{x}\right)'+C_2'(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=1
\end{aligned}
$$

(уравнение (11) следует привести к виду (8), т. е. разделить все его члены на x). Подставляя $C_2'(x)=-\dfrac{\cos x}{\sin x}C_1'(x)$ во второе уравнение, получаем $C_1'(x)\left(\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}-\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right)=1$.

Отсюда имеем $C_1'=-x\sin x$, $C_2'=x\cos x$. После интегрирования получаем

$$
\begin{aligned}
&C_1(x)=x\cos x-\sin x+\bar{C}_1,\\
&C_2(x)=x\sin x+\cos x+\bar{C}_2.
\end{aligned}
$$

Положив, например, $\bar{C}_1=\bar{C}_2=0$, получим частное решение уравнения (11):

$$\bar{y}(x)=(x\cos x-\sin x)\frac{\cos x}{x}+(x\sin x+\cos x)\frac{\sin x}{x}=1.$$

Следовательно, общее решение уравнения (11) имеет вид

$$y(x)=y_0(x)+\bar{y}(x)=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x}+1. \ ▶$$

Если правая часть линейного неоднородного уравнения (8) есть сумма нескольких функций

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_r(x)$$

и $\bar{y}_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, r)$ — некоторые частные решения уравнений $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f_i(x)$, $(i=1, 2, \ldots, r)$ соответственно, то сумма

$$\bar{y}(x)=\bar{y}_1(x)+\bar{y}_2(x)+\ldots+\bar{y}_r(x)$$

есть некоторое частное решение уравнения (8) (принцип суперпозиции решений).

Пример 13. Проверив, что функция $\bar{y}_1=-\dfrac{1}{4}e^x$ является частным решением уравнения $y''-2y'-3y=e^x$, а функция $\bar{y}_2=-\dfrac{1}{3}e^{2x}$ — частным решением уравнения $y''-2y'-3y=e^{2x}$, найти общее решение уравнения

$$y''-2y'-3y=e^x+e^{2x}.$$

◀ Согласно принципу суперпозиции частным решением последнего уравнения является функция $\bar{y}=-\dfrac{1}{4}e^x-\dfrac{1}{3}e^{2x}$. Общее решение соответствующего линейного однородного уравнения есть функция $y_0=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$ (см. задачу 9.282). По формуле (9) общее решение данного уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{4}e^x-\frac{1}{3}e^{2x}. \ ▶$$

9.308. Используя решение задачи 9.298, написать общее решение уравнения $x^2y''-6xy'+12y=3x$, предварительно убедившись в том, что функция $x/2$ есть одно из решений этого уравнения.

9.309. Используя решение задачи 9.303, написать общее решение уравнения $y'''-2y''+y'-2y=10e^{2x}$, предварительно убедившись в том, что функция e^{2x} есть одно из решений этого уравнения.

9.310. Проверив, что функции $y_1(x)=e^x$ и $y_2(x)=x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=0$, найти общее решение уравнения $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2$.

9.311. Проверив, что функции $y_1(x)=\cos x$ и $y_2(x)=x\cos x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y''+2\operatorname{tg}x\,y'+(2\operatorname{tg}^2x+1)y=0$, найти общее решение уравнения $\operatorname{ctg}x\cdot y''+2y'+(2\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)y=\cos^2x$.

9.312. Проверив, что функция $\bar y_1(x)=5x+6$ является частным решением уравнения $y''-6y'+5y=25x$, а функция $\bar y_2(x)=-e^{2x}$ — частным решением уравнения $y''-6y'+5y=3e^{2x}$, найти общее решение уравнения $y''-6y'+5y=25x+3e^{2x}$ (см. задачу 9.281).

9.313. Проверив, что функция $\bar y_1(x)=\frac{1}{2}e^x$ является частным решением уравнения $y'''+y'=e^x$, а функция $\bar y_2(x)=-\sin 2x$ — частным решением уравнения $y'''+y'=6\cos 2x$, найти общее решение уравнения $y'''+y'=e^x+6\cos 2x$ (см. задачу 9.300).

5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общий вид линейного дифференциального уравнения порядка n с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \tag{12}$$

где a_i ($i=1, 2, \ldots, n$) — действительные постоянные.

Уравнение

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0, \tag{13}$$

полученное заменой производных $y^{(k)}$ ($k=0, 1, \ldots, n$) искомой функции степенями λ^k, называется *характеристическим уравнением* для уравнения (12). Каждому действительному корню λ уравнения (13) кратности r соответствуют r линейно независимых решений уравнения (12):

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{\lambda x},$$

а каждой паре комплексных корней $\lambda=\alpha\pm i\beta$ кратности s соответствуют s пар линейно независимых решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Таким образом, если характеристическое уравнение имеет k действительных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратностей $r_1, \ldots, r_k$ и l пар комплексно сопряженных корней $\alpha_1+i\beta_1$, $\alpha_1-i\beta_1$, …, $\alpha_l+i\beta_l$, $\alpha_l-i\beta_l$ кратностей $s_1, \ldots, s_l$ ($r_1+\ldots+r_k+2s_1+\ldots+2s_l=n$), то общее решение уравнения (12) запишется в виде

$$y(x)=P_1(x)e^{\lambda_1x}+\ldots+P_k(x)e^{\lambda_kx}+(Q_1(x)\cos\beta_1x+$$
$$+R_1(x)\sin\beta_1x)e^{\alpha_1x}+\ldots+(Q_l(x)\cos\beta_lx+R_l(x)\sin\beta_lx)e^{\alpha_lx}, \tag{14}$$

где $P_\nu(x)$ — произвольный многочлен степени $r_\nu-1$, $\nu=1, \ldots, k$, а $Q_\mu(x)$ и $R_\mu(x)$ — произвольные многочлены степени $s_\mu-1$, $\mu=1, \ldots, l$.

Пример 14. Найти общее решение уравнения

$$y''+3y'+2y=0.$$

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^2+3\lambda+2=0$ имеет корни $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$. Запишем фундаментальную систему решений $y_1=e^{-x}$, $y_2=e^{-2x}$. Следовательно, общее решение имеет вид $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$. ▶

Пример 15. Найти общее решение уравнения

$$y''+2y'+5y=0.$$

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda+5=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$. Следовательно, функции $y_1=e^{-x}\cos 2x$, $y_2=e^{-x}\sin 2x$ составляют фундаментальную систему решений, а общее решение имеет вид

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x). ▶$$

Пример 16. Найти частное решение уравнения

$$y'''-3y''+3y'-y=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=3$.

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$ имеет единственный корень $\lambda=1$ кратности $r=3$. Поэтому фундаментальная система решений имеет вид $y_1=e^x$, $y_2=xe^x$, $y_3=x^2e^x$. Следовательно,

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x$$

— общее решение уравнения.

Для определения произвольных постоянных найдем производные

$$y'=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x+(C_2+2C_3x)e^x,$$
$$y''=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x+2(C_2+2C_3x)e^x+2C_3e^x$$

и используем начальные условия. Получаем: $C_1=1$, $C_1+C_2=2$, $C_1+2C_2+2C_3=3$, откуда $C_2=1$, $C_3=0$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y=(1+x)e^x. ▶$$

Пример 17. Найти общее решение уравнения

$$4y^{\text{IV}}+4y''+y=0.$$

◀ Характеристическое уравнение $4\lambda^4+4\lambda^2+1=0$, или $(2\lambda^2+1)^2=0$, имеет два комплексно сопряженных корня $\pm\frac{1}{\sqrt2}i$ кратности 2. Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид $\cos\frac{x}{\sqrt2}$, $x\cos\frac{x}{\sqrt2}$, $\sin\frac{x}{\sqrt2}$, $x\sin\frac{x}{\sqrt2}$. Отсюда получаем общее решение:

$$y=(C_1+C_2x)\cos\frac{x}{\sqrt2}+(C_3+C_4x)\sin\frac{x}{\sqrt2}. ▶$$

9.314. Известно частное решение $y_1=e^{kx}$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Соответствующее характеристическое уравнение имеет дискриминант, равный нулю. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=y'(0)=1$.

По данным корням характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами составить дифференциальное уравнение и написать его общее решение.

9.315. $\lambda_1=3,\ \lambda_2=-2$. **9.316.** $\lambda_1=\lambda_2=1$.

9.317. $\lambda_{1,2}=3\pm 2i$. **9.318.** $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$.

9.319. $\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=4$.

9.320. Показать, что общее решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha^2x=0$$

может быть представлено в виде $x=A\sin(\alpha t+\varphi)$ или $x=A\cos(\alpha t+\varphi)$, где A и φ — произвольные постоянные.

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

9.321. $y''-2y'-2y=0$. **9.322.** $y''+6y'+13y=0$.

9.323. $y''-6y'+9y=0$. **9.324.** $3y''-2y'-8y=0$.

9.325. $4y''-8y'+5y=0$. **9.326.** $4y''+4y'+y=0$.

9.327. $y'''-5y''+17y'-13y=0$.

9.328. $y^{IV}+4y''+3y=0$.

9.329. $y^{IV}+2y'''+y''=0$. **9.330.** $y^{IV}-y''=0$.

9.331. $y^{IV}+2y''+y=0$. **9.332.** $y^{IV}-8y''+16y=0$.

9.333. $y^{V}+8y'''+16y'=0$. **9.334.** $y^{V}-6y^{IV}+9y'''=0$.

9.335. $y^{VI}-2y^{V}+3y^{IV}-4y'''+3y''-2y'+y=0$.

9.336. $y^{VI}+2y^{V}+y^{IV}=0$.

Найти частные решения уравнений по данным начальным условиям:

9.337. $y''-5y'+4y=0$; $y(0)=y'(0)=1$.

9.338. $y''-2y'+y=0$; $y(2)=1$, $y'(2)=-2$.

9.339. $y'''-y'=0$; $y(0)=3$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=1$.

9.340*. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y''-y=0$, касающуюся в точке $O(0, 0)$ прямой $y=x$.

9.341. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y''-4y'+3y=0$, касающуюся в точке $M_0(0, 2)$ прямой $2x-2y+9=0$.

6. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, т. е. уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \qquad (15)$$

где a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — действительные постоянные, а $f(x)\not\equiv 0$.

Согласно формуле (9) общее решение уравнения (15) записывается в виде $y(x)=y_0(x)+\tilde{y}(x)$, где $y_0(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\tilde{y}(x)$ — любое частное решение уравнения (15). Общее решение $y_0(x)$ дается формулой (14). Для отыскания $\tilde{y}(x)$ в общем случае можно воспользоваться методом Лагранжа вариации произвольных постоянных (см. п. 4).

Пример 18. Найти общее решение уравнения

$$y'''+y'=\operatorname{tg} x.$$

◀ Общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$, так как $y_1=1$, $y_2=\cos x$, $y_3=\sin x$. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся методом вариации постоянных. Система (10) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} C_1'+C_2'\cos x+C_3'\sin x&=0,\\ -C_2'\sin x+C_3'\cos x&=0,\\ -C_2'\cos x-C_3'\sin x&=\operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Умножив обе части второго уравнения на $\sin x$, третьего на $\cos x$ и сложив, получим $C_2'=-\sin x$. Тогда из второго уравнения следует $C_3'=-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. Сложив обе части первого и третьего уравнений, найдем $C_1'=\operatorname{tg} x$. Интегрирование дает:

$$C_1=-\ln|\cos x|,\quad C_2=\cos x,\quad C_3=\sin x-\ln \operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right|.$$

Следовательно, искомое общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x-\ln|\cos x|-\sin x\cdot\ln\operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right|. \ ▶$$

Методом вариации произвольных постоянных решить следующие уравнения:

9.342. $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$. **9.343.** $y''+4y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

9.344. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

9.345. $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$.

В частных случаях, когда функция $f(x)$ в уравнении (15) имеет вид $f_1(x)=(d_0x^m+\ldots+d_m)e^{\lambda x}$ или $f_2(x)=((b_0x^{m_1}+\ldots+b_{m_1})\cos\beta x+(c_0x^{m_2}+\ldots+c_{m_2})\sin\beta x)e^{\alpha x}$, частное решение $\tilde{y}(x)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов. Именно, если λ или $\alpha\pm i\beta$ не совпадают ни с одним из действительных или соответственно комплексных корней характеристического уравнения (13), то $\tilde{y}(x)$ ищется в виде

$$\tilde{y}(x)=(D_0x^m+D_1x^{m-1}+\ldots+D_m)e^{\lambda x} \qquad (16)$$

для $f(x)=f_1(x)$ или в виде

$$\tilde{y}(x)=((B_0x^{\tilde{m}}+\ldots+B_{\tilde{m}})\cos\beta x+(C_0x^{\tilde{m}}+\ldots+C_{\tilde{m}})\sin\beta x)e^{\alpha x} \qquad (17)$$

для $f(x)=f_2(x)$. Здесь D_ν, B_ν и C_ν — неопределенные коэффициенты, $\bar{m}=\max(m_1, m_2)$.

Если же λ или $\alpha \pm i\beta$ совпадают с некоторым корнем уравнения (13) кратности r, то выражения в правой части (16) или (17) следует домножить на x^r, т. е. искать решение соответственно в виде

$$\tilde{y}(x)=x^r(D_0x^m+\ldots+D_m)e^{\lambda x} \tag{18}$$

для $f(x)=f_1(x)$ или

$$\tilde{y}(x)=x^r\left((B_0x^{\bar{m}}+\ldots+B_{\bar{m}})\cos\beta x+(C_0x^{\bar{m}}+\ldots+C_{\bar{m}})\sin\beta x\right)e^{\alpha x} \tag{19}$$

для $f(x)=f_2(x)$.

Пример 19. Найти общее решение уравнения

$$y''-3y'+2y=(x^2+x)e^{3x}.$$

◀ Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $\lambda^2-3\lambda+2=0$ имеет корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид $y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$, а общее решение однородного уравнения есть $y_0(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Так как $\lambda=3$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде $\tilde{y}=(D_0x^2+D_1x+D_2)e^{3x}$. Найдя производные $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ и подставив $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в исходное уравнение, получим (после сокращения на e^{3x})

$$2D_0x^2+(6D_0+2D_1)x+(2D_0+3D_1+2D_2)=x^2+x.$$

Сравнивая коэффициенты обеих частей этого тождества, получим систему уравнений для определения неизвестных D_0, D_1, D_2:

$$\begin{aligned} 2D_0&=1,\\ 6D_0+2D_1&=1,\\ 2D_0+3D_1+2D_2&=0, \end{aligned}$$

откуда $D_0=1/2$, $D_1=-1$, $D_2=1$.

Итак, $\tilde{y}=\left(\frac{1}{2}x^2-x+1\right)e^{3x}=\frac{1}{2}(x^2-2x+2)e^{3x}$, и, следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y=y_0+\tilde{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}(x^2-2x+2)e^{3x}. \ ▶$$

Пример 20. Найти частное решение уравнения

$$y''+4y=4(\sin 2x+\cos 2x),$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi)=y'(\pi)=2\pi$.

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^2+4=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=0\pm 2i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения есть $y_0=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{y}=x(B\cos 2x+C\sin 2x)$, так как $0\pm 2i$ — корни характеристического уравнения кратности 1. Найдя $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ и подставив $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в исходное уравнение, получим

$$-4B\sin 2x+4C\cos 2x=4\sin 2x+4\cos 2x,$$

откуда $B=-1$, $C=1$ и, следовательно,

$$\tilde{y}=x(\sin 2x-\cos 2x).$$

Общее решение будет $y=y_0+\tilde{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x(\sin 2x-\cos 2x)$.

Для нахождения C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями, предварительно продифференцировав общее решение:

$y'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x+x(2\cos 2x+2\sin 2x)+(\sin 2x-\cos 2x)$.

Имеем: $2\pi=C_1-\pi \Rightarrow C_1=3\pi$, $2\pi=2C_2+2\pi-1 \Rightarrow C_2=1/2$. Искомым частным решением является функция

$$y=3\pi\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+x(\sin 2x-\cos 2x). \ ▶$$

Пример 21. Найти общее решение уравнения

$$y''-4y'+4y=xe^{2x}.$$

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^2-4\lambda+4=0$ имеет двукратный корень $\lambda=2$. Общее решение соответствующего однородного уравнения есть $y_0=(C_1+C_2x)e^{2x}$.

Частное решение данного уравнения будем искать в виде $\tilde{y}=x^2(D_0x+D_1)e^{2x}$, так как показатель экспоненты в правой части уравнения совпадает с двукратным корнем характеристического уравнения. Методом неопределенных коэффициентов (т. е. найдя $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$, подставив $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в исходное уравнение, сократив на e^{2x} и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях x) находим $D_0=1/6$, $D_1=0$. Следовательно, $\tilde{y}=\frac{1}{6}x^3e^{2x}$, а общее решение принимает вид

$$y=y_0+\tilde{y}=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{6}x^3e^{2x}=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{6}x^3\right)e^{2x}. \ ▶$$

Для каждого из данных неоднородных дифференциальных уравнений написать вид его частного решения с неопределенными коэффициентами (числовых значений коэффициентов не находить):

9.346. $y''-8y'+16y=(1-x)e^{4x}$.

9.347. $y''+16y=\sin(4x+\alpha)$ $(\alpha=\mathrm{const})$.

9.348. $y''-4y'=2\cos^2 4x$.

9.349. $y^{IV}+4y''+4y=x\sin 2x$.

9.350. $y''-4y'=xe^{4x}$. **9.351.** $y''-7y'=(x-1)^2$.

9.352. $y''+2y'+5y=e^x((x+1)\cos 2x+3\sin 2x)$.

9.353. $y''-4y'+13y=e^{2x}(x^2\cos 3x-x\sin 3x)$.

Найти общие решения следующих уравнений:

9.354. $y''-y=e^{-x}$. **9.355.** $y''-y=\operatorname{ch} x$.

9.356. $y''+3y'-4y=e^{-4x}+xe^{-x}$.

9.357. $y''-5y'+6y=13\sin 3x$.

9.358. $y''-2my'+m^2y=\sin nx$ $(m\neq n)$.

9.359. $y''-2my'+m^2y=\sin mx$.

9.360. $y''+y=4x\cos x$. **9.361.** $y''+4y=\cos^2 x$.

9.362. $4y'' - y = x^3 - 24x$.

9.363. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$.

9.364. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$. 9.365. $y''' + y'' = 5x + e^{-x}$.

9.366. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$. 9.367. $y^{IV} + y'' = x^2 + x$.

9.368. $y^{IV} - y = xe^x + \cos x$. 9.369. $y^{V} - y^{IV} = xe^x - 1$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

9.370. $y'' - 2y' = 2e^x$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.

9.371. $y''' - y' = -2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.

9.372. $y'' + 4y = x$; $y(0) = 1$, $y(\pi/4) = \pi/2$.

9.373. $y'' + y = 4e^x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

9.374. $y^{IV} - y = 8e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$; $y'''(0) = 6$.

9.375. $y^{IV} - y = 8e^x$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

9.376. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$; $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$.

7. Дифференциальные уравнения Эйлера. Уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \quad x \neq 0,$$

где a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ постоянные, есть частный случай линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами и называется *уравнением Эйлера*. Введем новую независимую переменную t с помощью подстановки $x = e^t$ (если $x > 0$) или подстановки $x = -e^t$ (если $x < 0$). Пусть для определенности $x > 0$. Тогда $y'_x = e^{-t} y'_t$, $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$, $y'''_{xxx} = e^{-3t}(y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t)$ и т. д., и уравнение Эйлера преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Уравнение вида

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = f(x),$$

где a, b, a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные, приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами подстановкой $ax + b = e^t$ (в области $ax + b > 0$).

Решение однородного уравнения Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

можно (при $x > 0$) искать в виде $y = x^{\lambda}$.

Подставляя выражения для y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$ в однородное уравнение Эйлера, находим характеристическое уравнение для определения показателя степени λ. При этом, если λ — действительный корень характеристического уравнения кратности r, то ему соответствуют r линейно независимых решений

$$x^{\lambda},\ x^{\lambda} \ln x,\ x^{\lambda} (\ln x)^2,\ \ldots,\ x^{\lambda} (\ln x)^{r-1},$$

а если $\alpha \pm i\beta$ — пара комплексных корней кратности s, то ей соответствуют s пар линейно независимых решений

$$x^{\alpha} \cos(\beta \ln x),\quad x^{\alpha} \ln x \cos(\beta \ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha} (\ln x)^{s-1} \cos(\beta \ln x),$$
$$x^{\alpha} \sin(\beta \ln x),\quad x^{\alpha} \ln x \sin(\beta \ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha} (\ln x)^{s-1} \sin(\beta \ln x).$$

Пример 22. Найти общее решение неоднородного уравнения Эйлера $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.

◀ Положим $x = e^t$, считая $x > 0$. Тогда $y'_x = e^{-t} y'_t$, $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$, и наше уравнение примет вид

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t) - 3e^t \cdot e^{-t} y'_t + 5y = 3e^{2t},$$

или

$$y''_{tt} - 4y'_t + 5y = 3e^{2t}.$$

Общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения есть $y_0 = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$, а частное решение $\bar{y}$ неоднородного уравнения будем искать в виде $\bar{y} = Ae^{2t}$. Тогда $\bar{y}' = 2Ae^{2t}$, $\bar{y}'' = 4Ae^{2t}$, и, подставляя $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в неоднородное уравнение, приходим к тождеству $Ae^{2t} = 3e^{2t}$, откуда $A = 3$. Следовательно, $\bar{y} = 3e^{2t}$, и общее решение неоднородного уравнения есть $y = y_0 + \bar{y} = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t + 3)$. Возвращаясь к первоначальной независимой переменной x, получим окончательно

$$y = x^2 (C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x + 3).$$

Если учитывать случай $x < 0$, то общее решение можно записать в виде, охватывающем оба случая:

$$y = x^2 (C_1 \cos \ln |x| + C_2 \sin \ln |x| + 3). ▶$$

Пример 23. Найти общее решение однородного уравнения Эйлера

$$(x+2)^2 y'' + 3(x+2) y' - 3y = 0.$$

◀ Положим $y = (x+2)^{\lambda}$. Тогда имеем $y' = \lambda (x+2)^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda-1)(x+2)^{\lambda-2}$. Подставляем выражения y, y', y'' в заданное уравнение, получим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, корни которого $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Следовательно, общее решение есть функция

$$y = C_1 (x+2) + \frac{C_2}{(x+2)^3}. ▶$$

Найти общие решения уравнений Эйлера:

9.377. $x^2 y'' + xy' + y = 0$. 9.378. $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x$.

9.379. $x^2 y'' - 6y = 12 \ln x$.

9.380. $x^2 y''' - 3xy'' + 3y' = 0$.

9.381. $x^2 y''' - 2y' = 0$.

9.382. $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1) y' + 4y = 0$.

8. Краевые задачи в случае линейных дифференциальных уравнений. Во многих физических задачах приходится искать решение дифференциальных уравнений не по заданным начальным условиям, а по их значениям на концах интервала. Такие задачи получили название *краевых* (*граничных*) задач. Общий вид краевых условий для интервала (a, b) в случае уравнений 2-го порядка таков:

$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = A, \quad \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \tag{20}$$

где α_0, α_1, β_0, β_1 — одновременно не равные нулю заданные постоянные. Краевые условия называются *однородными*, если из того, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют этим условиям, следует, что и их линейная комбинация $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ также удовлетворяет этим условиям. Краевые условия (20) при $A=B=0$, очевидно, однородны.

Краевые задачи не всегда разрешимы. При решении краевой задачи сначала находится общее решение данного дифференциального уравнения, и из граничных условий получается система для определения значений постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, при которых из общего решения получается решение данной краевой задачи.

Пример 24. Найти решение уравнения $y''+y=1$, удовлетворяющее условиям $y'(0)=y'(\pi)=0$.

◀ Исходное уравнение имеет общее решение вида

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+1.$$

Из граничных условий получаем: $y'(0)=C_2=0$ и $y'(\pi)=-C_2=0$, так что функция $y(x)=C_1\cos x+1$ удовлетворяет граничным условиям при любом C_1. ▶

Пример 25. Найти частное решение уравнения

$$y''-2y'+2y=e^x,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0)+y(\pi/2)=e^{\pi/2},\quad y'(0)+y'(\pi/2)=1.$$

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+2=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=1\pm i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения есть $y_0=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{y}=Ae^x$. Подставив $\tilde{y}'=Ae^x$ и $\tilde{y}''=Ae^x$ в данное уравнение, получим $Ae^x=e^x$, откуда $A=1$. Итак, $\tilde{y}=e^x$, и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x+1).$$

Найдя

$$y'=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x+1)+e^x(-C_1\sin x+C_2\cos x),$$

используем краевые условия. Получим систему уравнений для определения C_1 и C_2:

$$(C_1+1)+e^{\pi/2}(C_2+1)=e^{\pi/2},$$
$$(C_1+C_2+1)+e^{\pi/2}(-C_1+C_2+1)=1.$$

Решив эту систему, находим

$$C_1=\frac{e^{\pi}-1-e^{\pi/2}}{1+e^{\pi}},\quad C_2=\frac{1-2e^{\pi/2}}{1+e^{\pi}},$$

т. е. искомым частным решением является функция

$$y=e^x\left(\frac{e^{\pi}-1-e^{\pi/2}}{1+e^{\pi}}\cos x+\frac{1-2e^{\pi/2}}{1+e^{\pi}}\sin x+1\right). ▶$$

Найти решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным краевым условиям:

9.383. $y''-y=0$; $y(0)=0$, $y(2\pi)=1$.

9.384. $y''-y=0$; $y(0)=0$, $y(1)=1$.

9.385. $y''+y=0$; $y'(0)=0$, $y'(1)=1$.

9.386. $y''+y=0$; $y'(0)=0$, $y'(\pi)=1$.

9.387. $yy''+y'^2+1=0$; $y(0)=1$, $y(1)=2$.

9.388. $y''+y=1$; $y(0)=0$, $y(\pi/2)=0$.

9.389. $yy'+y'^2+yy''=0$, $y(0)=1$, $y(-1)=0$.

9.390. $x^2y''-2xy'+2y=x^2$, $y(0)+2y'(0)=1$, $y(1)-y'(1)=0$.

9. Задачи физического характера.

9.391*. Материальная точка массы m движется прямолинейно под действием силы притяжения к неподвижному центру, пропорциональной расстоянию от точки до центра (коэффициент пропорциональности $k>0$). Сила сопротивления среды пропорциональна скорости (коэффициент пропорциональности $\lambda>0$). В начальный момент расстояние от точки до центра равно a, а скорость направлена по прямой, соединяющей точку с центром, и равна v_0. Найти закон движения точки при условии, что $\lambda^2<4mk$.

9.392*. Материальная точка массы m движется прямолинейно под действием силы отталкивания от неподвижного центра, пропорциональной расстоянию от точки до центра (коэффициент пропорциональности $k>0$). Сила сопротивления среды пропорциональна скорости (коэффициент пропорциональности $\lambda>0$). В начальный момент точка находится на расстоянии a от центра, скорость равна v_0 и направлена по прямой, соединяющей точку с центром. Найти закон движения точки.

9.393*. Узкая длинная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси. Шарик, находящийся внутри трубки, скользит по ней без трения. Найти закон движения шарика относительно трубки, если:

а) в начальный момент шарик находился на расстоянии a от оси вращения, начальная скорость шарика равна нулю;

б) в начальный момент шарик находился на оси вращения и имел начальную скорость v_0.

9.394. Узкая длинная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси. Шарик, находящийся внутри трубки, скользит по ней с трением, величина которого $R=2m\mu\omega\frac{dr}{dt}$, где μ — коэффициент трения скольжения. Найти закон движения шарика, если в начальный момент шарик находился на расстоянии a от оси вращения и начальная скорость его равна нулю.

9.395*. Тяжелая однородная цепь переброшена через гладкий гвоздь так, что с одной стороны свисает часть ее длиной 8 м, а с другой стороны — часть длиной 10 м. За какое время T цепь соскользнет с гвоздя?

9.396*. Груз массой 4 кг подвешен на пружине и увеличивает ее длину на 1 см. Найти закон движения груза, если верхний конец пружины совершает вертикальное гармоническое колебание $y=2\sin 30t$ (см) и в начальный момент груз находился в покое (сопротивлением среды пренебречь).

9.397*. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока с э. д. с. $e(t)=E\sin\omega t$, индуктивности L, сопротивления R и емкости C, причем $R^2C-4L<0$, $\omega\neq\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$. Найти ток i в цепи как функцию времени t, если $i|_{t=0}=\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=0$.

9.398*. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока с э. д. с. $e(t)=E\sin\omega t$, индуктивности L и емкости C, причем $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ (случай резонанса). Найти ток i в цепи как функцию времени t, если $i|_{t=0}=\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=0$.

9.399. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока с э. д. с. $e(t)=E\cos(\omega t+\psi)$, индуктивности L и емкости C, причем $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Найти ток i в цепи как функцию времени t, если $i|_{t=0}=\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=0$.

§ 3. Системы дифференциальных уравнений

1. Основные понятия. Связь с дифференциальными уравнениями n-го порядка. Если система k дифференциальных уравнений, связывающая независимую переменную x и k функций $y_1(x), \ldots, y_k(x)$, разрешена относительно старших производных этих функций $y_1^{(p_1)}(x), \ldots, y_k^{(p_k)}(x)$, т. е. имеет вид

$$\begin{aligned} y_1^{(p_1)}(x)&=f_1\left(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}\right),\\ y_2^{(p_2)}(x)&=f_2\left(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}\right),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_k^{(p_k)}(x)&=f_k\left(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}\right),\end{aligned} \qquad (1)$$

то она называется *канонической*, причем число $n=p_1+p_2+\ldots+p_k$ называется *порядком* системы. Каноническая система (1) при $p_1=p_2=\ldots=p_k=1$, т. е. система дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{aligned} y_1'(x)&=f_1(x, y_1, \ldots, y_n),\\ y_2'(x)&=f_2(x, y_1, \ldots, y_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n'(x)&=f_n(x, y_1, \ldots, y_n),\end{aligned} \qquad (2)$$

называется *нормальной* системой.

Решением системы (2) на интервале $a<x<b$ называется совокупность функций $y_1=\varphi_1(x), \ldots, y_n=\varphi_n(x)$, непрерывно дифференцируемых на (a, b) и обращающих уравнения системы (2) в тождества относительно $x\in(a, b)$.

Интегралом нормальной системы (2) называется функция $\Psi(x, y_1, \ldots, y_n)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial\Psi}{\partial y_n}$ в некоторой области D изменения переменных и принимающая при любых $x\in(a, b)$ постоянное значение при подстановке в нее произвольного решения системы.

Равенство

$$\Psi(x, y_1, \ldots, y_n)=C,$$

где $\Psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ — интеграл нормальной системы, а C — произвольная постоянная, называется *первым интегралом* системы (2).

Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

можно свести к нормальной системе (2). Обратно, системы (1) или (2) в большинстве случаев сводятся к дифференциальному уравнению n-го порядка, решая которое можно найти и решение исходной системы.

Пример 1. Привести каноническую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} y_1''&=2y_1-3y_2,\\ y_2''&=y_1-2y_2\end{aligned}$$

к нормальному виду.

◀ Положим $\frac{dy_1}{dx}=y_3$ и $\frac{dy_2}{dx}=y_4$. Тогда данную систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} y_1'&=y_3,\\ y_2'&=y_4,\\ y_3'&=2y_1-3y_2,\\ y_4'&=y_1-2y_2,\end{aligned}$$

которая и является нормальной системой 4-го порядка. ▶

Пример 2. Привести к нормальной системе дифференциальное уравнение $y''(x)+k^2y(x)=0$.

◀ Положим $y'=z$, тогда $y''=z'$, и уравнение приводится к нормальной системе уравнений

$$\begin{aligned} y'&=z,\\ z'&=-k^2y. \;▶\end{aligned}$$

Пример 3. Свести систему уравнений

$$\begin{aligned} y' &= y - z, \\ z' &= -4y + z, \end{aligned} \tag{3}$$

где $y = y(x)$, $z = z(x)$, к уравнению 2-го порядка и найти решение системы.

◀ Найдем $z(x)$ из первого уравнения: $z = y - y'$. Отсюда имеем $z' = y' - y''$. Подставив значения z и z' во второе уравнение системы, получим уравнение $y'' - 2y' - 3y = 0$, общим решением которого является функция

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Отсюда, используя равенство $z = y - y'$, найдем

$$z(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{3x} = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}.$$

Таким образом, при любых постоянных C_1 и C_2 система функций

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, \\ z &= 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x} \end{aligned} \tag{4}$$

является решением исходной системы (3). ▶

Задача Коши для системы (2) ставится следующим образом: найти решение $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ системы (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0, \; y_2(x_0) = y_2^0, \; \ldots, \; y_n(x_0) = y_n^0, \tag{5}$$

где $y_1^0, \ldots, y_n^0$ — заданные числа.

Теорема Коши. *Пусть правые части $f_1, f_2, \ldots, f_n$ нормальной системы (2) определены в $(n+1)$-мерной области D изменения переменных $x, y_1, \ldots, y_n$. Если в некоторой окрестности Δ точки $M_0(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in D$ функции f_ν непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_j}$ по переменным $y_1, \ldots, y_n$, то существует интервал $x_0 - h < x < x_0 + h$ изменения переменной x, в котором существует и притом единственное решение системы (2), удовлетворяющее начальным условиям (5).*

Общим решением системы (2) называется совокупность функций

$$y_\nu(x, C_1, \ldots, C_n), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

зависящих от n произвольных постоянных, которые при любых допустимых значениях постоянных $C_1, \ldots, C_n$ обращают уравнения системы (2) в тождества, и в области, в которой выполнены условия теоремы Коши, из совокупности функций (6) можно получить решение любой задачи Коши.

Пример 4. Показать, что определенная равенствами (4) система функций является общим решением системы (3) (см. пример 3).

◀ В качестве области D для (3) можно взять область $-\infty < x, y, z < +\infty$; при этом для любых x_0, y_0 и z_0 из этой области выполнены условия теоремы Коши. Подставив значения x_0, y_0, z_0 в систему (4), получим систему для определения C_1 и C_2:

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 e^{-x_0} + C_2 e^{3x_0}, \\ z_0 &= 2C_1 e^{-x_0} - 2C_2 e^{3x_0}. \end{aligned}$$

Определитель этой системы $\Delta = 2e^{2x_0} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4e^{2x_0}$ отличен от нуля при любом x_0. Следовательно, при любых y_0 и z_0 числа C_1 и C_2 определяются однозначно, т. е. из системы функций (4) можно получить любое решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (3). ▶

Путем исключения параметров a и b найти систему дифференциальных уравнений, определяющих семейства линий в пространстве:

9.400. $\begin{cases} y = ax + b, \\ x^2 + y^2 = z^2 - 2bz. \end{cases}$ **9.401.** $\begin{cases} ax + z = b, \\ y^2 + z^2 = b^2. \end{cases}$

Дифференциальные уравнения или системы заменить нормальными системами дифференциальных уравнений (x — независимая переменная):

9.402. $y''' - xyy' + y'^3 = 0$. **9.403.** $y^{\text{IV}} - y^2 = 0$.

9.404. $y'' = y' + z'$, $z'' = z' + u'$, $u'' = u' + y'$.

9.405. $z'' + z - 2y = 0$, $y''' + z - y = x$.

9.406. $y'' - z - u = 0$, $z' + uz = x^2$, $u''' = -xy$.

Проверить, что функции $y(x)$ и $z(x)$ являются решениями систем дифференциальных уравнений:

9.407. $\begin{aligned} y' &= -1/z, \\ z' &= 1/y; \end{aligned}$ $\quad y = e^{-x/2}, \; z = 2e^{x/2}$.

9.408. $\begin{aligned} y' &= 1 - \frac{2y}{x}, \\ z' &= y + z + \frac{2y}{x} - 1; \end{aligned}$ $\quad y = \frac{x}{3} + \frac{1}{x^2}, \; z = e^x - \frac{x}{3} + \frac{1}{x^2}$.

Проверить, что функции $\Psi(x, y, z)$ являются интегралами данных нормальных систем:

9.409. $\Psi(x, y, z) = x + y - z$; $\quad \begin{aligned} y' &= \frac{z}{y - z}, \\ z' &= \frac{y}{z - y}. \end{aligned}$

9.410. $\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $\quad \begin{aligned} y' &= \frac{3x - 4z}{2z - 3y}, \\ z' &= \frac{4y - 2x}{2z - 3y}. \end{aligned}$

9.411. $\Psi(x, y, z) = \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$; $\quad \begin{aligned} y' &= y/z, \\ z' &= z/y. \end{aligned}$

2. Методы интегрирования нормальных систем. Одним из методов решения систем дифференциальных уравнений является метод исключения неизвестных, который сводит систему уравнений к одному или нескольким дифференциальным уравнениям с одной неизвестной функцией в каждом. Поясним это на примерах (см. также пример 3).

Пример. 5. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = -z, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{y}$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=1$, $z(1) = -\frac{1}{2}$.

◀ Продифференцируем обе части первого уравнения по x, получим $y'' = -z'$. Так как из второго уравнения $z' = \frac{z^2}{y}$, то $y'' = -\frac{z^2}{y}$, но из первого уравнения $z^2 = (y')^2$, поэтому система двух уравнений первого порядка свелась к одному уравнению второго порядка $y'' = -\frac{(y')^2}{y}$, т. е. к уравнению $yy'' + (y')^2 = 0$.

Левая часть полученного уравнения есть $(yy')'$, поэтому $yy' = \frac{1}{2} C_1$, откуда $y\,dy = \frac{1}{2} C_1\,dx$ и $\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} C_1 x + \frac{1}{2} C_2$, т. е. $y = \pm\sqrt{C_1 x + C_2}$. Из первого уравнения системы имеем: $z = -y'$, т. е. $z = \mp \frac{C_1}{2\sqrt{C_1 x + C_2}}$. Система функций $y = \pm\sqrt{C_1 x + C_2}$, $z = \mp \frac{C_1}{2\sqrt{C_1 x + C_2}}$ образует общее решение заданной системы дифференциальных уравнений.

Для нахождения частного решения используем начальные условия $y(1)=1$, $z(1) = -\frac{1}{2}$. Имеем: $1 = \sqrt{C_1 + C_2}$, $-\frac{1}{2} = -\frac{C_1}{2\sqrt{C_1 + C_2}}$, откуда $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Итак, пара функций $y = \sqrt{x}$, $z = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ и есть искомое частное решение системы. ▶

Не всякую систему дифференциальных уравнений можно свести к одному уравнению.

Пример 6. Показать, что систему уравнений

$$y' = xy, \quad z' + y' = z + xy$$

нельзя свести к одному уравнению.

◀ Действительно, подставив во второе уравнение вместо y' его значение xy, получим два не связанных между собой дифференциальных уравнения, каждое из которых содержит только одну функцию:

$$y' = xy, \quad z' = z;$$

из этих уравнений находим $y = C_1 e^{x^2/2}$ и $z = C_2 e^x$. ▶

Другим методом интегрирования систем дифференциальных уравнений является **метод выделения интегрируемых комбинаций**, т. е. получения из системы (2) такого уравнения, которое можно проинтегрировать и получить первый интеграл системы. Если найдены n независимых первых интегралов системы (2), то их совокупность дает общий интеграл этой системы.

Пример 7. Найти общий интеграл системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z + e^y}{z + e^x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - e^{x+y}}{z + e^x}.$$

◀ Умножим обе части второго уравнения системы на e^{-x} и сложим их с соответствующими частями первого уравнения и с тождеством $-e^{-x}z = -e^{-x}z$, получим $(e^{-x}z)' + y' = 0$, откуда $e^{-x}z + y = C_1$. Это первый интеграл системы.

Теперь умножим обе части второго уравнения на e^{-y} и сложим с равенствами $-e^{-y}zy' = -e^{-y}z\frac{z + e^y}{z + e^x}$ и $x' = 1$, получим $(e^{-y}z)' + x' = 0$, откуда $e^{-y}z + x = C_2$. Это тоже первый интеграл системы. Так как якобиан системы

$$e^{-x}z + y = C_1,$$
$$e^{-y}z + x = C_2$$

отличен от нуля (проверьте!), то оба первых интеграла независимы между собой, поэтому их совокупность неявно определяет общее решение заданной системы уравнений. ▶

Для выделения интегрируемых комбинаций из системы (2) последнюю удобнее записать в так называемой симметрической форме:

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dx}{1} \tag{7}$$

и использовать следующее свойство равных дробей: если $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \ldots = \frac{u_n}{v_n} = \gamma$, то при любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ имеет место соотношение

$$\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n} = \gamma. \tag{8}$$

Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ подбираются обычно таким образом, чтобы числитель в (8) был полным дифференциалом знаменателя или же знаменатель был равен нулю.

В соотношении (7) независимая переменная и искомые функции равноправны.

Пример 8. Найти общее решение системы уравнений

$$y' = \frac{mz - lx}{ly - nz}, \quad z' = \frac{nx - my}{ly - nz}.$$

◀ Запишем систему в симметрической форме:

$$\frac{dx}{ly - nz} = \frac{dy}{mz - lx} = \frac{dz}{nx - my} = \gamma$$

и воспользуемся соотношением (8). Выбираем $\alpha_1 = m$, $\alpha_2 = n$ и $\alpha_3 = l$, тогда имеем

$$\frac{d(mx + ny + lz)}{0} = \gamma,$$

т. е. $d(mx + ny + lz) = 0$, откуда

$$mx + ny + lz = C_1, \tag{9}$$

4 Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича

Аналогичным образом, выбирая $\alpha_1=2x$, $\alpha_2=2y$ и $\alpha_3=2z$, приходим к равенству $d(x^2+y^2+z^2)=0$, откуда

$$x^2+y^2+z^2=C_2^2. \tag{10}$$

Соотношения (9) и (10) образуют два первых интеграла системы, неявно определяющих общее решение. ▶

Найти общие решения систем дифференциальных уравнений:

9.412. $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{y}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x}$. **9.413.** $\frac{dt}{xy}=\frac{dx}{ty}=\frac{dy}{tx}$.

9.414. $\frac{dy}{dx}=\frac{z}{(z-y)^2}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{y}{(z-y)^2}$.

9.415. $\frac{dx}{dt}=\frac{x-y}{z-t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{x-y}{z-t}$, $\frac{dz}{dt}=x-y+1$.

9.416. $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2-z^2}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{2xz}{x^2-y^2-z^2}$.

9.417. $\frac{dt}{xt}=\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{txy-2t^2}$.

9.418. $\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}$.

9.419. $\frac{dx}{dt}=\frac{y^2}{x}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{x^2}{y}$.

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений, а также частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

9.420. $\frac{dy}{dx}=\frac{z-1}{z}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{y-x}$; $y(0)=-1$, $z(0)=1$.

9.421. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{yz}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{x}{y^2}$; $y(0)=z(0)=1$.

9.422*. Для системы дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt}=\frac{x^2-t}{y}$, $\frac{dy}{dt}=-x$ и функций

а) $\varphi_1=t^2+2xy$; б) $\varphi_2=x^2-ty$

проверить, являются ли соотношения $\varphi_i=C$ $(i=1, 2)$ первыми интегралами этой системы.

3. Физический смысл нормальной системы. Для простоты ограничимся рассмотрением системы двух дифференциальных уравнений, причем будем считать, что независимая переменная t есть время:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=f_1(t, x, y),\\ \dot{y}&=f_2(t, x, y).\end{aligned} \tag{11}$$

Решение $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ этой системы есть некоторая кривая в плоскости Oxy с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат. Плоскость Oxy называется *фазовой плоскостью*, а кривая $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ — *фазовой траекторией* системы (11).

Сама система (11) называется *динамической системой*. Динамическая система называется *автономной* (*стационарной*), если в правые части уравнений этой системы время t не входит явным образом

Динамическая система определяет поле скоростей движущейся в плоскости точки в любой момент времени t. Решение динамической системы $x=x(t)$, $y=y(t)$ — это уравнения движения точки: они определяют положение движущейся точки в любой момент времени t. Начальные условия задают положение точки в начальный момент: $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$. Уравнения движения определяют также и траекторию движения, будучи уравнениями этой кривой в параметрической форме.

Пример 9. Найти фазовую траекторию автономной динамической системы

$$\dot{x}=\frac{x^2}{y},\quad \dot{y}=x,$$

проходящую через точку $M_0(2, 3)$.

◀ Продифференцируем второе уравнение по t и подставим выражение $\dot{x}=\ddot{y}$ и $x=\dot{y}$ в первое уравнение. Получим $\ddot{y}=\frac{(\dot{y})^2}{y}$, или $y\ddot{y}-(\dot{y})^2=0$, т. е. одно уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией y.

Разделим обе части последнего уравнения на y^2 и перепишем его так: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)=0$. Отсюда следует, что $\frac{\dot{y}}{y}=C_1$, или $\frac{dy}{y}=C_1\,dt$, откуда $y=C_2e^{C_1t}$.

Найдем $\dot{y}=C_1C_2e^{C_1t}$ и подставим во второе уравнение системы; получим $x=C_1C_2e^{C_1t}$. Итак, система функций $x=C_1C_2e^{C_1t}$, $y=C_2e^{C_1t}$ есть общее решение нашей системы дифференциальных уравнений.

Исключая из общего решения время t $(C_2e^{C_1t}=y)$, получим, что фазовыми траекториями системы являются прямые $x=C_1y$, причем через заданную точку $M_0(2, 3)$ проходит прямая $y=\frac{3}{2}x$. ▶

Для указанных систем найти фазовые траектории, проходящие через заданные точки M_0:

9.423. $\dot{x}=1-x^2-y^2$, $\dot{y}=2x$; $M_0(1, 2)$.

9.424. $\dot{x}=1-x^2-y^2$, $\dot{y}=2xy$; $M_0(2, 1)$.

9.425. $\dot{x}=2x$, $\dot{y}=x+2y$; $M_0(1, 1)$.

9.426. $\dot{x}=y-x$, $\dot{y}=y-2x$; $M_0(1, 1)$.

4. Линейные однородные системы. Нормальная линейная однородная система n-го порядка имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=a_{11}(t)\,x_1+a_{12}(t)\,x_2+\ldots+a_{1n}(t)\,x_n,\\ \dot{x}_2&=a_{21}(t)\,x_1+a_{22}(t)\,x_2+\ldots+a_{2n}(t)\,x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_n&=a_{n1}(t)\,x_1+a_{n2}(t)\,x_2+\ldots+a_{nn}(t)\,x_n\end{aligned} \tag{12}$$

или, в матричной форме,

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t), \tag{13}$$

где

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

В области непрерывности коэффициентов $a_{ij}(t)$, $i, j=1, \dots, n$, система (12) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Фундаментальной системой решений системы (12) называется совокупность произвольных n линейно независимых решений $X_k(t) = (x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), \dots, x_n^{(k)}(t))^T$, $k=1, 2, \dots, n$.

Если $X_k(t)$, $k=1, 2, \dots, n$, — фундаментальная система решений системы (12), то общее решение имеет вид $X(t)=\sum\limits_{k=1}^{n} C_k X_k(t)$, где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Интегрирование системы (12) обычно проводится методом исключения (см. пример 3).

Решить системы линейных дифференциальных уравнений:

9.427. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}+xz, \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{2y}{x^3}+\frac{z}{x}.$

9.428. $x\frac{dy}{dx}=-y+zx, \quad x^2\frac{dz}{dx}=-2y+zx.$

9.429. $\dot{x}=-\frac{y}{t}, \; \dot{y}=-\frac{x}{t}.$

9.430. $\dot{x}=-\frac{2}{t}x, \; \dot{y}=y+\frac{t+2}{t}x.$

В частном случае систем с постоянными коэффициентами, когда матрица $A(t)$ в правой части (13) не зависит от t, для отыскания фундаментальной системы решений $X_k(t)$, $k=1, 2, \dots, n$, могут быть использованы методы линейной алгебры.

Из характеристического уравнения

$$\det(A-\lambda E)=0 \tag{14}$$

находятся различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ и для всякого корня λ (с учетом его кратности) определяется соответствующее ему частное решение $X^{(\lambda)}(t)$. Общее решение системы имеет вид

$$X(t)=\sum_{k=1}^{s} C_k X^{(\lambda_k)}(t). \tag{15}$$

При этом возможны следующие случаи:

а) λ — действительный корень кратности 1. Тогда

$$X^{(\lambda)}(t)=Y^{(\lambda)}e^{\lambda t}=\begin{pmatrix} y_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ y_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

где $Y^{(\lambda)}$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ (т. е. $AY^{(\lambda)}=\lambda Y^{(\lambda)}$, $Y^{(\lambda)} \neq O$).

Пример 10. Найти частное решение однородной системы

$$\dot{x}_1=4x_1+x_3,$$
$$\dot{x}_2=3x_1+2x_2,$$
$$\dot{x}_3=2x_1+3x_2+4x_3,$$

удовлетворяющее условиям $x_1(0)=6$, $x_2(0)=-6$, $x_3(0)=24$.

◀ Характеристическое уравнение (14) для этой системы имеет вид

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Его корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=5$. Собственные векторы, например, таковы:

$$Y^{(\lambda_1)}=\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_3)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$X^{(\lambda_1)}=\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^{t}, \quad X^{(\lambda_2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad X^{(\lambda_3)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Отсюда общее решение системы в соответствии с (15) имеет вид

$$X(t)=C_1\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^{t}+C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}+C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Для нахождения частного решения константы C_1, C_2, C_3 определяем из следующей системы:

$$X(0)=\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3C_1+C_3 \\ -9C_1+C_3 \\ 7C_1+C_2+5C_3 \end{pmatrix},$$

откуда $C_1=1$, $C_2=2$, $C_3=3$. Окончательно для искомого частного решения получаем

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^{t}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}+\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} e^{5t}. \; ▶$$

б) λ — комплексный корень кратности 1. Тогда корнем характеристического уравнения (14) является также сопряженное с λ число $\bar{\lambda}$. Вместо комплексных частных решений $X^{(\lambda)}(t)$ и $X^{(\bar{\lambda})}(t)$ следует взять действительные частные решения $X_1^{(\lambda)}(t)=\operatorname{Re} X^{(\lambda)}(t)$ и $X_2^{(\lambda)}(t)=\operatorname{Im} X^{(\lambda)}(t)$.

Пример 11. Найти общее решение системы

$$\dot{x}_1(t)=x_1+x_2,$$
$$\dot{x}_2(t)=-2x_1+3x_2.$$

или, в матричной форме,

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t), \tag{13}$$

где

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

В области непрерывности коэффициентов $a_{ij}(t)$, $i, j=1, \dots, n$, система (12) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Фундаментальной системой решений системы (12) называется совокупность произвольных n линейно независимых решений $X_k(t)=\left(x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), \dots, x_n^{(k)}(t)\right)^{\mathrm{T}}$, $k=1, 2, \dots, n$.

Если $X_k(t)$, $k=1, 2, \dots, n$, — фундаментальная система решений системы (12), то общее решение имеет вид $X(t)=\sum\limits_{k=1}^{n} C_k X_k(t)$, где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Интегрирование системы (12) обычно проводится методом исключения (см. пример 3).

Решить системы линейных дифференциальных уравнений:

9.427. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}+xz, \quad \dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{2y}{x^2}+\dfrac{z}{x}.$

9.428. $x\dfrac{dy}{dx}=-y+zx, \quad x^2\dfrac{dz}{dx}=-2y+zx.$

9.429. $\dot{x}=-\dfrac{y}{t}, \; \dot{y}=-\dfrac{x}{t}.$

9.430. $\dot{x}=-\dfrac{2}{t}x, \; \dot{y}=y+\dfrac{t+2}{t}x.$

В частном случае **систем с постоянными коэффициентами**, когда матрица $A(t)$ в правой части (13) не зависит от t, для отыскания фундаментальной системы решений $X_k(t)$, $k=1, 2, \dots, n$, могут быть использованы методы линейной алгебры.

Из характеристического уравнения

$$\det(A-\lambda E)=0 \tag{14}$$

находятся различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ и для всякого корня λ (с учетом его кратности) определяется соответствующее ему частное решение $X^{(\lambda)}(t)$. Общее решение системы имеет вид

$$X(t)=\sum_{k=1}^{s} C_k X^{(\lambda_k)}(t). \tag{15}$$

При этом возможны следующие случаи:

а) λ — действительный корень кратности 1. Тогда

$$X^{(\lambda)}(t)=Y^{(\lambda)}e^{\lambda t}=\begin{pmatrix} y_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ y_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

где $Y^{(\lambda)}$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ (т. е. $AY^{(\lambda)}=\lambda Y^{(\lambda)}$, $Y^{(\lambda)}\neq O$).

Пример 10. Найти частное решение однородной системы

$$\dot{x}_1=4x_1+x_2,$$
$$\dot{x}_2=3x_1+2x_2,$$
$$\dot{x}_3=2x_1+3x_2+4x_3,$$

удовлетворяющее условиям $x_1(0)=6$, $x_2(0)=-6$, $x_3(0)=24$.

◀ Характеристическое уравнение (14) для этой системы имеет вид

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Его корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=5$. Собственные векторы, например, таковы:

$$Y^{(\lambda_1)}=\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_3)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$X^{(\lambda_1)}=\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}e^{t}, \quad X^{(\lambda_2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}, \quad X^{(\lambda_3)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}e^{5t}.$$

Отсюда общее решение системы в соответствии с (15) имеет вид

$$X(t)=C_1\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}e^{t}+C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}+C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}e^{5t}.$$

Для нахождения частного решения константы C_1, C_2, C_3 определяем из следующей системы:

$$X(0)=\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3C_1+ & C_3 \\ -9C_1+ & C_3 \\ 7C_1+C_2+ & 5C_3 \end{pmatrix},$$

откуда $C_1=1$, $C_2=2$, $C_3=3$. Окончательно для искомого частного решения получаем

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}e^{4t}+\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}e^{5t}. \blacktriangleright$$

б) λ — комплексный корень кратности 1. Тогда корнем характеристического уравнения (14) является также сопряженное с λ число $\bar{\lambda}$. Вместо комплексных частных решений $X^{(\lambda)}(t)$ и $X^{(\bar{\lambda})}(t)$ следует взять действительные частные решения $X_1^{(\lambda)}(t)=\operatorname{Re} X^{(\lambda)}(t)$ и $X_2^{(\lambda)}(t)=\operatorname{Im} X^{(\lambda)}(t)$.

Пример 11. Найти общее решение системы

$$\dot{x}_1(t)=x_1+x_2,$$
$$\dot{x}_2(t)=-2x_1+3x_2.$$

◀ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2}=2\pm i$. Для нахождения собственного вектора, соответствующего корню $\lambda=2+i$, получаем систему

$$\begin{aligned}(-1-i)\,y_1^{(\lambda)}+\quad\; y_2^{(\lambda)}&=0,\\ -2y_1^{(\lambda)}+(1-i)\,y_2^{(\lambda)}&=0.\end{aligned}$$

Полагая $y_1^{(\lambda)}=1$, находим $y_2^{(\lambda)}=1+i$, т. е.

$$Y^{(\lambda)}=\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X^{(\lambda)}(t)=\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}e^{(2+i)t}.$$

Отсюда пара действительных частных решений имеет следующий вид

$$X_1^{(\lambda)}(t)=\operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}e^{(2+i)t}\right)=\begin{pmatrix}e^{2t}\cos t\\ e^{2t}(\cos t-\sin t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}e^{2t},$$

$$X_2^{(\lambda)}(t)=\operatorname{Im}\left(\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}e^{(2+i)t}\right)=\begin{pmatrix}e^{2t}\sin t\\ e^{2t}(\cos t+\sin t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}e^{2t}.$$

Окончательно (см. формулу (15)) получаем общее решение

$$X(t)=C_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}e^{2t}+C_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}e^{2t}=\begin{pmatrix}C_1\cos t+C_2\sin t\\ (C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\sin t\end{pmatrix}e^{2t}. \ ▶$$

в) λ — корень кратности $r\geq 2$. Соответствующее этому корню решение системы (13) ищется в виде вектора

$$X^{(\lambda)}(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}t+\ldots+\alpha_1^{(r)}t^{r-1}\\ \alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(2)}t+\ldots+\alpha_2^{(r)}t^{r-1}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}t+\ldots+\alpha_n^{(r)}t^{r-1}\end{pmatrix}e^{\lambda t}, \tag{16}$$

коэффициенты которого $\alpha_i^{(j)}$, $i=1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, r$, определяются из системы линейных уравнений, получающейся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях t в результате подстановки вектора (16) в исходную систему (13).

Пример 12. Найти общее решение системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=2x_1-x_2,\\ \dot{x}_2(t)&=4x_1+6x_2.\end{aligned}$$

◀ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 4 & 6-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2=0$$

имеет корень $\lambda=4$ кратности $r=2$. Поэтому ищем решение системы в виде

$$X^{(\lambda)}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 t\\ \alpha_2+\beta_2 t\end{pmatrix}e^{4t}.$$

Подставляем это выражение в исходную систему и сокращаем на e^{4t}.

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}t=\begin{pmatrix}2\alpha_1-\alpha_2\\ 4\alpha_1+6\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\beta_1-4\beta_2\\ 4\beta_1+6\beta_2\end{pmatrix}t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем:

$$\begin{aligned}\beta_1+2\alpha_1+\alpha_2&=0,\\ \beta_2-4\alpha_1-2\alpha_2&=0,\\ 2\beta_1+\beta_2&=0,\\ -2\beta_2-4\beta_1&=0.\end{aligned}$$

Полагая $\alpha_1=C_1$ и $\beta_1=C_2$, имеем $\beta_2=-2C_2$ и $\alpha_2=-2C_1-C_2$. Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$X(t)=X^{(\lambda)}(t)=\begin{pmatrix}C_1+C_2 t\\ -(2C_1+C_2)-2C_2 t\end{pmatrix}e^{4t}. \ ▶$$

Решить следующие системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Там, где даны начальные условия, кроме общего решения, найти соответствующее частное решение:

9.431. $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-2x+3y$.

9.432. $\dot{x}=x+3y$, $\dot{y}=-x+5y$, $x(0)=3$, $y(0)=1$.

9.433. $\dot{x}=3x-2y$, $\dot{y}=4x+7y$, $x(0)=1$, $y(0)=0$.

9.434. $\dot{x}=2x-5y$, $\dot{y}=5x-6y$.

9.435. $\dot{x}=x-4y$, $\dot{y}=x-3y$.

9.436. $\dot{x}=-x+2y$, $\dot{y}=-2x-5y$, $x(0)=0$, $y(0)=1$.

9.437. $\dot{x}=y$, $\dot{y}=z$, $\dot{z}=x$, $x(0)=y(0)=z(0)=1$.

9.438. $\dot{x}=y+z$, $\dot{y}=z+x$, $\dot{z}=x+y$, $x(0)=y(0)=2$, $z(0)=-1$.

9.439. $\dot{x}=x-2y-z$, $\dot{y}=-x+y+z$, $\dot{z}=x-z$.

9.440. $\dot{x}=5x+2y-3z$, $\dot{y}=4x+5y-4z$, $\dot{z}=6x+4y-4z$.

5. **Линейные неоднородные системы.** Нормальная линейная неоднородная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\ldots+a_{1n}(t)x_n+f_1(t),\\ \dot{x}_2&=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\ldots+a_{2n}(t)x_n+f_2(t),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dot{x}_n&=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\ldots+a_{nn}(t)x_n+f_n(t).\end{aligned} \tag{17}$$

где по крайней мере одна из функций $f_k(t)$ не равна тождественно нулю. В матричной форме система (17) имеет вид

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + F(t), \tag{18}$$

где $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^{\mathrm{T}}$. Интегрирование системы (17) можно проводить методом исключения (см. пример 3), однако иногда предпочтительнее найти предварительно решение $X_0(t)$ соответствующей (18) однородной системы

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) \tag{19}$$

и какое-либо частное решение $\tilde{X}(t)$ системы (18). Тогда общее решение системы (18) имеет вид

$$X(t) = X_0(t) + \tilde{X}(t). \tag{20}$$

Если известна фундаментальная система $X_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, решений однородной системы (19), то общее решение $X(t)$ можно найти методом вариации произвольных постоянных. Именно, полагая

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)X_k(t), \tag{21}$$

определяем функции $C_k(t)$ подстановкой (21) в систему (18). Учитывая при этом равенства

$$\dot{X}_k(t) - A(t)X_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

приходим к системе уравнений относительно $\dot{C}_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t)X_k(t) = F(t). \tag{22}$$

Из этой системы находим $\dot{C}_k(t) = \varphi_k(t)$ и, интегрируя, получаем функции $C_k(t)$ с точностью до произвольных постоянных. Подставляя их в (21), получаем искомое общее решение неоднородной системы (18).

Пример 13. Зная фундаментальную систему решений

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t}$$

однородной системы

$$\dot{x}_1 = 6x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2,$$

найти общее решение неоднородной системы

$$\dot{x}_1 = 6x_1 + x_2 + t,$$
$$\dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2 + 1.$$

◀ Воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Для функций $\dot{C}_1(t)$ и $\dot{C}_2(t)$ составим систему вида (22)

$$\dot{C}_1(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + \dot{C}_2(t)\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдя

$$\dot{C}_1(t) = \frac{5t+1}{6}e^{-7t}, \quad \dot{C}_2(t) = \frac{1-t}{6}e^{-t}$$

и проинтегрировав, получим

$$C_1(t) = -\left(\frac{5}{42}t + \frac{2}{49}\right)e^{-7t} + C_1, \quad C_2(t) = \frac{1}{6}te^{-t} + C_2.$$

Таким образом, общее решение системы запишется в виде

$$X(t) = \left(-\left(\frac{5}{42}t + \frac{2}{49}\right)e^{-7t} + C_1\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + \left(\frac{1}{6}te^{-t} + C_2\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t} =$$

$$= C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{7}t - \frac{2}{49} \\ \frac{5}{7}t - \frac{2}{49} \end{pmatrix}. ▶$$

Если коэффициенты $a_{ij}(t)$ системы (17) постоянны, т. е. $a_{ij}(t) = a_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, а функции $f_i(t)$ имеют вид произведений

$$(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}, \tag{23}$$

где $P(t)$ и $Q(t)$ — многочлены, то частное решение $\tilde{X}(t)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов, записав $\tilde{X}(t)$ в виде, аналогичном (23), с учетом совпадения или несовпадения чисел $\alpha \pm i\beta$ с корнями характеристического уравнения.

Следует иметь в виду, что если k — наибольшая степень многочленов $P(t)$ и $Q(t)$ в (23) и $\lambda = \alpha + i\beta$ — корень кратности r характеристического уравнения, то частное решение $\tilde{X}(t)$ ищется в виде

$$\tilde{X}(t) = \mathrm{Re}\left(t^{r-1}\begin{pmatrix} \gamma_{10}t^{k+1} + \gamma_{11}t^{k} + \ldots + \gamma_{1,\,k+1} \\ \gamma_{20}t^{k+1} + \gamma_{21}t^{k} + \ldots + \gamma_{2,\,k+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{n0}t^{k+1} + \gamma_{n1}t^{k} + \ldots + \gamma_{n,\,k+1} \end{pmatrix} e^{\lambda t}\right).$$

Пример 14. Найти частное решение системы

$$\dot{x}_1 = -x_2 + t^2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + e^{t}.$$

◀ Так как характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, ищем частное решение системы в виде суммы многочлена второй степени и функции вида De^{t}:

$$x_1 = A_1t^2 + B_1t + C_1 + D_1e^{t}, \quad x_2 = A_2t^2 + B_2t + C_2 + D_2e^{t}.$$

Подставляя эти функции в заданную систему, получим равенства

$$2A_1t + B_1 + D_1e^{t} = -A_2t^2 - B_2t - C_2 - D_2e^{t} + t^2,$$
$$2A_2t + B_2 + D_2e^{t} = A_1t^2 + B_1t + C_1 + D_1e^{t} + e^{t}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t и при e^{t}, получим систему

$$2A_1 = -B_2, \quad B_1 = -C_2, \quad D_1 = -D_2, \quad 1 - A_2 = 0,$$
$$2A_2 = B_1, \quad B_2 = C_1, \quad D_2 = D_1 + 1, \quad A_1 = 0.$$

Отсюда $A_1=B_2=C_1=0$, $A_2=1$, $B_1=2$, $C_2=-2$, $D_2=1/2$, $D_1=-1/2$, и искомое частное решение имеет вид

$$x_1=2t-\frac{1}{2}e^t,$$

$$x_2=t^2-2+\frac{1}{2}e^t. \blacktriangleright$$

Пример 15. Найти общее решение системы

$$\dot{X}(t)=AX(t)+F(t),$$

где $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ и $F=\begin{pmatrix}t+1\\ 2t\end{pmatrix}e^{3t}$.

◀ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+8+1=(\lambda-3)^2=0$$

имеет корень $\lambda=3$ кратности 2. Общее решение однородной системы ищем в виде $X_0(t)=\begin{pmatrix}\alpha t+\beta\\ \gamma t+\delta\end{pmatrix}e^{3t}$, подставив которое в однородную систему и сокращая на e^{3t}, имеем

$$3\begin{pmatrix}\alpha t+\beta\\ \gamma t+\delta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha t+\beta\\ \gamma t+\delta\end{pmatrix}.$$

Получим систему

$$3(\alpha t+\beta)+\beta=2(\alpha t+\beta)-(\gamma t+\delta),$$
$$3(\gamma t+\delta)+\delta=\alpha t+\beta+4(\gamma t+\delta),$$

из которой следует два независимых соотношения $\alpha=-\gamma$ и $\beta+\alpha=-\delta$. Полагая $\alpha=C_1$ и $\beta=C_2$, имеем $\gamma=-C_1$ и $\delta=-C_1-C_2$, т. е.

$$X_0(t)=\begin{pmatrix}C_1t+C_2\\ -C_1t-(C_1+C_2)\end{pmatrix}e^{3t}.$$

Так как $F(t)$ содержит множитель e^{3t}, причем $\lambda=3$ — корень характеристического уравнения кратности 2, то ищем частное решение в виде

$$\tilde{X}(t)=t\begin{pmatrix}A_1t^2+B_1t+D_1\\ A_2t^2+B_2t+D_2\end{pmatrix}e^{3t}=\begin{pmatrix}A_1t^3+B_1t^2+D_1t\\ A_2t^3+B_2t^2+D_2t\end{pmatrix}e^{3t}$$

$\left(\text{а не в виде } t^2\begin{pmatrix}A_1t+B_1\\ A_2t+B_2\end{pmatrix}e^{3t}\right)$.

Подставив $\tilde{X}(t)$ в заданную систему и сократив на e^{3t}, получаем матричное равенство

$$3\begin{pmatrix}A_1t^3+B_1t^2+D_1t\\ A_2t^3+B_2t^2+D_2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3A_1t^2+2B_1t+D_1\\ 3A_2t^2+2B_2t+D_2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1t^3+B_1t^2+D_1t\\ A_2t^3+B_2t^2+D_2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t+1\\ 2t\end{pmatrix},$$

которое можно записать в виде равенств

$$A_1t^3+B_1t^2+D_1t+3A_1t^2+2B_1t+D_1=-A_2t^3-B_2t^2-D_2t+t+1,$$
$$-A_2t^3-B_2t^2-D_2t+3A_2t^2+2B_2t+D_2=A_1t^3+B_1t^2+D_1t+2t.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}A_1+A_2&=0, & A_1+A_2&=0,\\ B_1+3A_1+B_2&=0, & B_1+B_2-3A_2&=0,\\ D_1+2B_1+D_2&=1, & D_1+D_2-2B_2&=-2,\\ D_1&=1, & D_2&=0.\end{aligned}$$

Находим $D_1=1$, $D_2=0$, $B_1=0$, $B_2=3/2$, $A_1=-1/2$, $A_2=1/2$. Следовательно,

$$\tilde{X}(t)=t\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}t^2+1\\ \frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t\end{pmatrix}e^{3t},$$

и искомое общее решение запишется в виде

$$X(t)=X_0(t)+\tilde{X}(t)=\begin{pmatrix}C_1t+C_2-\frac{1}{2}t^3+t\\ -C_1t-(C_1+C_2)+\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2\end{pmatrix}e^{3t}. \blacktriangleright$$

Найти решения следующих систем уравнений:

9.441. $\dot{x}=3x-2y+t$, $\dot{y}=3x-4y$.

9.442. $\dot{x}=x-y$, $\dot{y}=x+y+e^t$.

9.443. $\dot{x}=5x-3y+te^{2t}$, $\dot{y}=3x-y+e^{3t}$.

9.444. $\dot{x}=x+y-\cos t$, $\dot{y}=-2x-y+\sin t+\cos t$.

9.445. $\dot{x}=y+\operatorname{tg}^2 t-1$, $\dot{y}=-x+\operatorname{tg} t$.

9.446*. $\ddot{x}=2x+3y$, $\ddot{y}=4x-2y$.

9.447*. Вещество A разлагается на два вещества P и Q. Скорость образования каждого из них пропорциональна массе неразложившегося вещества A. Найти законы изменения масс x и y веществ P и Q в зависимости от времени t, если через час после начала процесса разложения $x=\frac{a}{8}$, $y=\frac{3a}{8}$, где a — первоначальная масса вещества A.

9.448*. Материальная точка массы m притягивается центром O с силой, пропорциональной расстоянию. Движение начинается из точки A на расстоянии a от центра с начальной скоростью v_0, перпендикулярной к отрезку OA. Найти траекторию движения.

§ 4. Элементы теории устойчивости

1. Основные понятия. Пусть задана нормальная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ \dot{x}_2(t)&=f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_n(t)&=f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\end{aligned} \qquad (1)$$

с начальными условиями в точке t_0. Решение $X_0(t)=(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))^{\top}$ системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для всякого решения $X(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t))^{\top}$ той же системы, значения которого в точке t_0 удовлетворяют неравенствам

$$|x_i(t_0)-\varphi_i(t_0)|<\delta(\varepsilon), \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

для всех $t>t_0$ справедливы неравенства

$$|x_i(t)-\varphi_i(t)|<\varepsilon, \quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Если же при сколь угодно малом $\delta>0$ хотя бы для одного решения $X(t)$ неравенства (3) не выполняются, то решение $X_0(t)$ называется *неустойчивым*.

Если решение $X_0(t)$ не только устойчиво, но, кроме того, при условии (2) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t\to+\infty}|x_i(t)-\varphi_i(t)|=0, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

то это решение называется *асимптотически устойчивым*.

Пример 1. Исследовать на устойчивость решение дифференциального уравнения $\dot{x}=ax$ ($a\in\mathbb{R}$), определяемое начальным условием $x_0(t_0)=C_0$.

◀ Если $a\neq 0$, то решение имеет вид

$$x_0(t)=C_0e^{a(t-t_0)}.$$

Пусть $x(t)=Ce^{a(t-t_0)}$ — произвольное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $|C-C_0|<\delta=\varepsilon$. Тогда при $a<0$ получаем

$$|x(t)-x_0(t)|=|Ce^{a(t-t_0)}-C_0e^{a(t-t_0)}|=e^{a(t-t_0)}|C-C_0|<\varepsilon,$$

откуда

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)-x_0(t)|=|C-C_0|\lim_{t\to+\infty}e^{a(t-t_0)}=0,$$

т. е. решение асимптотически устойчиво.

При $a>0$

$$|x(t)-x_0(t)|=e^{a(t-t_0)}|C-C_0|$$

может быть сколь угодно большим числом при достаточно больших t. Значит, при $a>0$ решение неустойчиво.

Если $a=0$, то решение имеет вид $x_0(t)=C_0$.

Для всякого решения $x(t)=C$ с условием $|C-C_0|<\delta=\varepsilon$ имеем

$$|x(t)-x_0(t)|=|C-C_0|<\varepsilon.$$

Но

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)-x_0(t)|=|C-C_0|\neq 0,$$

а потому решение устойчиво, но не асимптотически устойчиво. ▶

Исследование на устойчивость решения $X_0(t)$ системы (1) может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального (нулевого) решения — *точки покоя* некоторой системы, аналогичной системе (1) (см. задачу 9.454).

Исследовать на устойчивость решения следующих уравнений и систем уравнений:

9.449. $\dot{x}=t(x-1)$, $x(0)=1$. 9.450. $\dot{x}=t-1$, $x(0)=-1$.

9.451. $\dot{x}=x+y$, $\dot{y}=x-y$; $x(0)=y(0)=0$.

9.452. $\dot{x}=-2x-3y$, $\dot{y}=x+y$; $x(0)=y(0)=0$.

9.453. $\dot{x}=\alpha x-y$, $\dot{y}=\alpha y-z$, $\dot{z}=\alpha z-x$;
$x(0)=y(0)=z(0)=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

9.454*. Написать систему дифференциальных уравнений, исследование на устойчивость точки покоя которой равносильно исследованию на устойчивость решения $X_0(t)$ системы (1).

9.455. Сформулировать определения устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости для точки покоя системы дифференциальных уравнений.

2. Простейшие типы точек покоя. Для исследования на устойчивость точки покоя системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}\dot{x}&=a_{11}x+a_{12}y,\\ \dot{y}&=a_{21}x+a_{22}y,\end{aligned} \quad \Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0, \tag{4}$$

надо составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\Delta=0$$

и найти его корни λ_1 и λ_2. В таблице 4.1 приведена классификация точек покоя системы (4) в зависимости от корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения.

Пример 2. Определить характер и исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-2x+\alpha y,\\ \dot{y}&=x+y\end{aligned}$$

в зависимости от параметра α ($\alpha\neq-2$).

◀ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & \alpha\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-(\alpha+2)=0$$

имеет корни $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{9+4\alpha}$. Исследуя поведение корней λ_1, λ_2 в зависимости от параметра α и используя данные таблицы 4.1, получаем:

если $\alpha<-9/4$ (корни комплексные, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}<0$) — устойчивый фокус;

если $-9/4\leqslant\alpha<-2$ (корни действительные и отрицательные) — устойчивый узел;

если $-2<\alpha$ (корни действительные и разных знаков) — седло, точка покоя неустойчива. ▶

Таблица 4.1

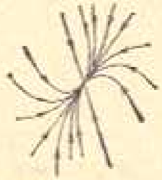
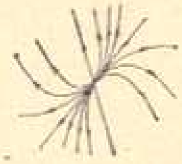
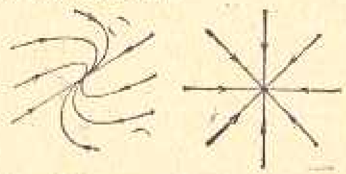
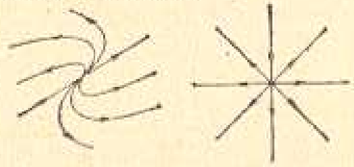
Корни λ_1, λ_2		Характер точки покоя	Устойчивость точки покоя
Действительные: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$	*Устойчивый узел* 	Асимптотически устойчива
	$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$	*Неустойчивый узел* 	Неустойчива
	$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$	*Седло* 	Неустойчива
Комплексные $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha < 0$, $\beta \neq 0$	*Устойчивый фокус* 	Асимптотически устойчива
	$\alpha > 0$, $\beta \neq 0$	*Неустойчивый фокус* 	Неустойчива
	$\alpha = 0$, $\beta \neq 0$	*Центр* 	Устойчива

Таблица 4.1 (продолжение)

Корни λ_1, λ_2		Характер точки покоя	Устойчивость точки покоя
Действительный, кратности 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\lambda < 0$	*Устойчивый узел* 	Асимптотически устойчива
	$\lambda > 0$	*Неустойчивый узел* 	Неустойчива

Определить характер точек покоя следующих систем:

9.456. $\dot{x} = x + 2y, \quad \dot{y} = -3x + y.$

9.457. $\dot{x} = -2x + \frac{1}{3}y, \quad \dot{y} = -2x + \frac{1}{2}y.$

9.458. $\dot{x} = -x + 3y, \quad \dot{y} = -x + 2y.$

9.459. $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x - 2y.$

9.460. $\dot{x} = -6x - 5y, \quad \dot{y} = -2x - 5y.$

9.461. $\dot{x} = -x + 2y, \quad \dot{y} = -2x - 5y.$

Определить, при каких значениях параметра α точка покоя системы устойчива.

9.462. $\dot{x} = \alpha x - y, \quad \dot{y} = x + 2y.$

9.463. $\dot{x} = -3x + \alpha y, \quad \dot{y} = -\alpha x + y.$

9.464*. Исследовать на устойчивость уравнение упругих колебаний

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta^2 x = 0 \qquad (\alpha > 0).$$

9.465*. Пусть задана система n линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказать, что если все корни характеристического уравнения этой системы имеют отрицательную действительную часть, то точка покоя системы асимптотически устойчива. Если же хотя бы один из корней характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то точка покоя неустойчива.

Используя результат задачи 9.465, исследовать на устойчивость точку покоя каждой из следующих систем:

9.466. $\dot{x}=2x,\quad \dot{y}=3x+2y;\quad \dot{z}=-x-y-z.$

9.467. $\dot{x}=-2x-y,\quad \dot{y}=x-2y,\quad \dot{z}=x+3y-z.$

3. Метод функций Ляпунова. Этот метод в применении к автономной системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1&=f_1(x_1,\ \ldots,\ x_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \dot{x}_n&=f_n(x_1,\ \ldots,\ x_n), \end{aligned} \tag{5}$$

где $f_i(0,\ \ldots,\ 0)=0$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, состоит в непосредственном исследовании устойчивости ее точки покоя при помощи подходящим образом подобранной *функции Ляпунова* $V(x_1,\ \ldots,\ x_n)$.

Верны следующие теоремы Ляпунова:

Теорема 1 (об устойчивости). *Если существует дифференцируемая функция $V(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:*

а) $V(x_1,\ \ldots,\ x_n)\geqslant 0$, причем $V=0$ лишь при $x_1=\ldots=x_n=0$;

б) $\dfrac{dV}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n)\leqslant 0$,

то точка покоя системы (5) *устойчива.*

Теорема 2 (об асимптотической устойчивости). *Если существует дифференцируемая функция $V(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:*

а) $V(x_1,\ \ldots,\ x_n)\geqslant 0$, причем $V=0$ лишь при $x_1=\ldots=x_n=0$,

б) $\dfrac{dV}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n)\leqslant 0$, причем $\dfrac{dV}{dt}=0$ лишь при $x_1=\ldots=x_n=0$,

то точка покоя системы (5) *асимптотически устойчива.*

Теорема 3 (о неустойчивости). *Если существует дифференцируемая функция $V(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат условиям:*

а) $V(0,\ \ldots,\ 0)=0$ и сколь угодно близко от начала координат имеются точки, в которых $V(x_1,\ \ldots,\ x_n)>0$;

б) $\dfrac{dV}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n)\geqslant 0$, причем $\dfrac{dV}{dt}=0$ лишь при $x_1=\ldots=x_n=0$,

то точка покоя системы (5) *неустойчива.*

Пример 3. С помощью функции Ляпунова исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{aligned} \dot{x}&=-x+y,\\ \dot{y}&=-2y^3-x. \end{aligned}$$

◀ В качестве функции Ляпунова возьмем $V=x^2+y^2$. Тогда $\dfrac{dV}{dt}=2x(-x+y)+2y(-2y^3-x)=-2(x^2+2y^4)$, и функция V вместе с $\dfrac{dV}{dt}$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Значит, точка покоя системы асимптотически устойчива. ▶

Пример 4. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{aligned} \dot{x}&=x(2+\cos x),\\ \dot{y}&=-y. \end{aligned}$$

◀ Возьмем функцию $V(x,\ y)=x^2-y^2$. Тогда $\dfrac{dV}{dt}=2x^2(2+\cos x)+$ $+2y^2=2(2x^2+y^2+x^2\cos x)=2\left(x^2+2x^2\cos^2\dfrac{x}{2}+y^2\right)>0$ всюду, кроме начала координат. Кроме того, сколь угодно близко к началу координат найдутся точки, в которых $V>0$ (например, вдоль прямой $y=0$ $V=x^2>0$). Следовательно, выполнены условия теоремы 3, и точка покоя неустойчива. ▶

Общего метода построения функций Ляпунова не существует. В простейших случаях ее следует искать в виде: $V=ax^2+by^2$, $V=ax^4+by^4$, $V=ax^2+by^4$, подбирая надлежащим образом постоянные $a>0$ и $b>0$.

Пример 5. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{aligned} \dot{x}&=-x+\frac{3}{2}y+3xy^3,\\ \dot{y}&=-x-\frac{1}{3}y-2x^2y^3. \end{aligned}$$

◀ Функцию Ляпунова будем искать в виде $V=ax^2+by^2$, $a>0$, $b>0$. Тогда имеем:

$$\frac{dV}{dt}=2ax\left(-x+\frac{3}{2}y+3xy^3\right)+2by\left(-x-\frac{y}{3}-2x^2y^3\right)=$$
$$=-\left(2ax^2+\frac{2}{3}by^2\right)+(xy+2x^2y^4)(3a-2b).$$

Полагая $b=\dfrac{3}{2}a$, получим, что $\dfrac{dV}{dt}=-a(2x^2+y^2)\leqslant 0$ при всяком $a>0$. Из теоремы 2 вытекает, что точка покоя системы асимптотически устойчива. ▶

Исследовать на устойчивость точки покоя следующих систем:

9.468. $\dot{x}=-x-y-x^3-y^2,\quad \dot{y}=x-y+xy.$

9.469. $\dot{x}=y+x^3,\quad \dot{y}=-x+y^3.$

9.470. $\dot{x}=xy^4, \quad \dot{y}=-x^4y.$

9.471. $\dot{x}=-y+x^5, \quad \dot{y}=x+y^5.$

9.472. $\dot{x}=y+x^2y^2-\frac{1}{4}x^5, \quad \dot{y}=-2x-2x^2y-\frac{1}{2}y^3.$

9.473. $\dot{x}=-2x+4xy^2, \quad \dot{y}=y+2x^2y.$

4. Устойчивость по первому приближению. Предположим, что правые части системы (5), т. е. функции $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$, дифференцируемы в начале координат достаточное число раз. Разложим их по формуле Тейлора в окрестности начала координат:

$$f_i(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+F_i(x_1, \ldots, x_n),$$

где $a_{ij}=\frac{\partial f_i(0, \ldots, 0)}{\partial x_j}$, а F_i — члены второго порядка малости относительно $x_1, \ldots, x_n$. Тогда исходная система (5) может быть записана в виде

$$\dot{x}_1=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j+F_1(x_1 \ldots x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{x}_n=\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j+F_n(x_1 \ldots x_n).$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

называемую системой уравнений *первого приближения* для системы (5).

Справедливо следующее утверждение: если все корни характеристического уравнения системы (6) имеют отрицательные действительные части, то точка покоя системы (6), а также исходной системы (5) асимптотически устойчива; если хотя бы один из корней характеристического уравнения системы (6) имеет положительную действительную часть, то точка покоя системы (6) (и системы (5)) неустойчива.

Говорят, что в этих случаях возможно исследование системы (5) на *устойчивость по первому приближению*. В остальных случаях такое исследование, вообще говоря, невозможно, так как начинает сказываться влияние членов 2-го порядка малости.

Пример 6. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\dot{x}=2x+8\sin y,$$
$$\dot{y}=2-e^x-3y-\cos y.$$

◀ Разлагая функции $\sin y$, $\cos y$, e^x по формуле Тейлора и выделяя члены 1-го порядка малости, можем переписать исходную систему в виде

$$\dot{x}=2x+8y+F_1(x, y),$$
$$\dot{y}=-x-3y+F_2(x, y),$$

где F_1, F_2 — члены 2-го порядка малости относительно x и y. Соответствующая система уравнений первого приближения вида (6) запишется следующим образом:

$$\dot{x}=2x+8y,$$
$$\dot{y}=-x-3y.$$

Корни ее характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$ имеют отрицательные действительные части. Следовательно, точка покоя этой, а также исходной систем устойчива. ▶

Исследовать на устойчивость по первому приближению точки покоя следующих систем дифференциальных уравнений:

9.474. $\dot{x}=\frac{1}{4}(e^x-1)-9y, \quad \dot{y}=\frac{1}{5}x-\sin y.$

9.475. $\dot{x}=5x+y\cos y, \quad \dot{y}=3x+2y-y^3e^y.$

9.476. $\dot{x}=7x+2\sin y, \quad \dot{y}=e^x-3y-1.$

9.477. $\dot{x}=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\sin 2y, \quad \dot{y}=-y-2x.$

9.478. $\dot{x}=\ln(4y+e^{-3x}), \quad \dot{y}=2y-1+\sqrt[3]{1-6x}.$

9.479. $\dot{x}=e^{x+2y}-\cos 3x, \quad \dot{y}=\sqrt{4+8x}-2e^y.$

9.480. Показать, что исследование на устойчивость по первому приближению точки покоя системы

$$\dot{x}=-4y-x^3, \quad \dot{y}=3x-y^3$$

невозможно. Провести исследование методом функций Ляпунова.

§ 5. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Задача Коши. Задача нахождения частного решения $y=y(x)$ ($y(x_0)=y_0$) дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$, называемая задачей Коши, может быть приближенно решена численными методами.

Метод Эйлера. Значения искомой функции $y=y(x)$ на отрезке $[x_0, X]$ находят по формуле

$$y_{k+1}=y_k+h\cdot f(x_k, y_k), \tag{1}$$

где $y_k=y(x_k)$, $x_{k+1}=x_k+h$ $(x_n=X)$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, и $h=\frac{X-x_0}{n}$ (шаг). По заданной предельной абсолютной погрешности ε начальный шаг вычислений h устанавливают с помощью неравенства $h^2<\varepsilon$.

Метод Эйлера с итерациями. Для вычисления значений функции $y=y(x)$ применяют формулу

$$y_{k+1}^{(m)}=y_k+\frac{h}{2}\left(f(x_k,\ y_k)+f\left(x_k,\ y_{k+1}^{(m-1)}\right)\right), \qquad (2)$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \qquad m=1,\ 2,\ \ldots,\ M,$$

где $y_{k+1}^{(0)}=y_{k+1}$ вычисляют по формуле (1). При каждом значении k вычисления продолжаются до выполнения неравенства

$$\left|y_{k+1}^{(m)}-y_{k+1}^{(m-1)}\right|<\varepsilon, \qquad (3)$$

где ε — заданная предельная абсолютная погрешность. После этого полагают $y_{k+1}=y_{k+1}^{(m)}$ и переходят к нахождению следующего значения y_{k+2} искомой функции. Если неравенство (3) не достигается, то уменьшают шаг h и выполняют все вычисления сначала. По заданной предельной абсолютной погрешности ε начальный шаг вычислений h устанавливают с помощью неравенства $h^3<\varepsilon$. Апостериорная оценка точности выполняется при помощи правила Рунге — Ромберга (см. ниже).

Пример 1. Решить методом Эйлера с итерациями задачу Коши на отрезке $[0,\ 1]$ для уравнения $y'=2x-y$ с начальным условием $y=-1$ при $x=0$. Шаг выбрать так, чтобы удовлетворялось неравенство $h^3<0{,}01$.

◀ Исходя из неравенства $h^3<0{,}01$, выберем шаг вычислений $h=0{,}2$. Тогда $n=\dfrac{1-0}{0{,}2}=5$. Проводя вычисления с одним запасным знаком, находим по формуле (1) значение

$$y_1^{(0)}=-1+0{,}2\,(2\cdot0-(-1))=-0{,}800.$$

Ведем итерационную обработку y_1 по формуле (2):

$$y_1^{(1)}=-1+\frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot0-(-1)+2\cdot0{,}2-(-0{,}800))=-0{,}780,$$

$$y_1^{(2)}=-1+\frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot0-(-1)+2\cdot0{,}2-(-0{,}780))=-0{,}782,$$

$$y_1^{(3)}=-1+\frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot0-(-1)+2\cdot0{,}2-(-0{,}782))=-0{,}782.$$

Получаем $y_1=-0{,}782$.

Вычислим по формуле (1) значение $y_2^{(0)}$:

$$y_2^{(0)}=-0{,}782+0{,}2\,(2\cdot0{,}2-(-0{,}782))=-0{,}546.$$

Проводим итерационную обработку:

$$y_2^{(1)}=-0{,}782+\frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot0{,}2-(-0{,}782)+2\cdot0{,}4-(-0{,}546))=-0{,}529,$$

$$y_2^{(2)}=-0{,}782+\frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot0{,}2-(-0{,}782)+2\cdot0{,}4-(-0{,}529))=-0{,}531,$$

$$y_2^{(3)}=-0{,}782+\frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot0{,}2-(-0{,}782)+2\cdot0{,}4-(-0{,}531))=-0{,}531.$$

Получаем $y_2=-0{,}531$.

Аналогично вычисляя, находим $y_3=-0{,}253$, $y_4=0{,}047$, $y_5=0{,}366$. Округляя до сотых, получаем $y_0=-1{,}00$, $y_1=-0{,}78$, $y_2=-0{,}53$,

$y_3=-0{,}25$, $y_4=0{,}05$, $y_5=0{,}37$. Найденные значения y_k совпадают с точностью до 10^{-2} со значениями частного решения $y=e^{-x}+2x-2$ в соответствующих точках отрезка $[0,\ 1]$. ▶

Метод Рунге — Кутта. Значения искомой функции $y=y(x)$ на отрезке $[x_0,\ X]$ последовательно находят по формулам

$$y_{k+1}=y_k+\Delta y_k, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \qquad (4)$$

где

$$\Delta y_k=\frac{1}{6}\left(q_1^{(k)}+2q_2^{(k)}+2q_3^{(k)}+q_4^{(k)}\right),$$

$$q_1^{(k)}=h\cdot f(x_k,\ y_k), \qquad q_2^{(k)}=h\cdot f\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_k+\frac{q_1^{(k)}}{2}\right),$$

$$q_3^{(k)}=h\cdot f\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_k+\frac{q_2^{(k)}}{2}\right), \qquad q_4^{(k)}=h\cdot f\left(x_{k+1},\ y_k+q_3^{(k)}\right),$$

$$x_{k+1}=x_k+h \quad (x_n=X), \qquad h=\frac{X-x_0}{n}.$$

По заданной предельной абсолютной погрешности ε начальный шаг вычислений h устанавливают с помощью неравенства $h^4<\varepsilon$. Апостериорная оценка точности выполняется по правилу Рунге — Ромберга.

Правило Рунге — Ромберга. Пусть $y_k^{(h)}$ и $y_k^{(2h)}$ — значения искомой функции, полученные одним из указанных выше методов при шагах вычисления h и $2h$ соответственно, а ε — заданная абсолютная предельная погрешность. Тогда считается, что достигнута заданная точность вычислений, если выполняется неравенство

$$\frac{1}{2^s-1}\cdot\left|y_k^{(h)}-y_k^{(2h)}\right|<\varepsilon \qquad (5)$$

при всех k и при $s=2,\ 3,\ 4$ соответственно для методов Эйлера, Эйлера с итерациями и Рунге — Кутта. Решением задачи является функция $\{y_k^{(h)}\}$.

Применяя указанное правило, последовательно вычисляют значения искомой функции с шагом $2h$ и с шагом h и сравнивают полученные результаты по формуле (5). Вычисления заканчивают, когда неравенство (5) выполняется при всех k.

Пример 2. Решить методом Рунге — Кутта с точностью до 10^{-3} задачу Коши на отрезке $[0,\ 0{,}6]$ для уравнения $y'=x+y$ с начальным условием $y=1$ при $x=0$.

◀ Исходя из неравенства $h^4<0{,}001$, выбираем начальный шаг вычислений $h=0{,}15$. Тогда $n=4$. Проводя вычисления с одним запасным знаком, находим y_1 по формулам (4):

$$y_1=1+\Delta y_0=1+\frac{1}{6}\left(q_1^{(0)}+2q_2^{(0)}+2q_3^{(0)}+q_4^{(0)}\right),$$

где $q_1^{(0)}=0{,}1500$, $q_2^{(0)}=0{,}1725$, $q_3^{(0)}=0{,}1742$, $q_4^{(0)}=0{,}1986$. Имеем:

$$y_1=1+\frac{1}{6}\,(0{,}1500+2\cdot0{,}1725+2\cdot0{,}1742+0{,}1986)=1{,}1737.$$

Далее,

$$y_2=1{,}1737+\frac{1}{6}\left(q_1^{(1)}+2q_2^{(1)}+2q_3^{(1)}+q_4^{(1)}\right),$$

где $q_1^{(1)}=0{,}1986$, $q_2^{(1)}=0{,}2247$, $q_3^{(1)}=0{,}2267$, $q_4^{(1)}=0{,}2551$. Следовательно,

$$y_2=1{,}1737+\frac{1}{6}(0{,}1986+2\cdot 0{,}2247+2\cdot 0{,}2267+0{,}2551)=1{,}3998.$$

Аналогично вычисляем $y_3=1{,}6867$ и $y_4=2{,}0443$.

Уменьшим шаг в два раза, т. е. выберем $h=0{,}075$, теперь $n=8$. Находим $y_1^{(h)}$ по формулам (4):

$$y_1^{(h)}=1+\Delta y_0=1+\frac{1}{6}(\bar{q}_1^{(0)}+2\bar{q}_2^{(0)}+2\bar{q}_3^{(0)}+\bar{q}_4^{(0)})=$$

$$=1+\frac{1}{6}(0{,}075+2\cdot 0{,}0806+2\cdot 0{,}0808+0{,}0867)=1{,}0808.$$

Аналогично находим остальные значения $y_k^{(h)}$.

Результаты вычислений помещаем в таблицу:

$y_k^{(2h)}$	$y_k^{(h)}$	$y_k^{(2h)}-y_k^{(h)}$
$y_0^{(2h)}=1$	$y_0^{(h)}=1$	0
	$y_1^{(h)}=1{,}0808$	
$y_1^{(2h)}=1{,}1737$	$y_2^{(h)}=1{,}1737$	0
	$y_3^{(h)}=1{,}2796$	
$y_2^{(2h)}=1{,}3998$	$y_4^{(h)}=1{,}3997$	0,0001
	$y_5^{(h)}=1{,}5350$	
$y_3^{(2h)}=1{,}6867$	$y_6^{(h)}=1{,}6866$	0,0001
	$y_7^{(h)}=1{,}8559$	
$y_4^{(2h)}=2{,}0443$	$y_8^{(h)}=2{,}0442$	0,0001

Очевидно, что левая часть неравенства (5) в данном случае не превосходит 0,00002. Поэтому $y_k^{(h)}$ с точностью до 10^{-4} представляют искомую функцию, т. е. все найденные знаки верные. ▶

Метод Милна. Значения искомой функции $y=y(x)$ на отрезке $[x_0, X]$ последовательно находят по двум формулам:

$$\bar{y}_k=y_{k-4}+\frac{4h}{3}(2\cdot f(x_{k-3}, y_{k-3})-f(x_{k-2}, y_{k-2})+ +2\cdot f(x_{k-1}, y_{k-1})), \quad (6)$$

$$y_k=y_{k-2}+\frac{h}{3}(f(x_{k-2}, y_{k-2})+4f(x_{k-1}, y_{k-1})+f(x_k, \bar{y}_k)),$$

$$k=4, 5, \ldots, n, \quad h=\frac{X-x_0}{n}, \quad x_k=x_{k-1}+h.$$

Первые четыре значения y_0, y_1, y_2, y_3 должны быть заданы, для чего y_1, y_2, y_3 предварительно находят каким-либо другим методом. Предельная абсолютная погрешность ε значения y_k приближенного

решения определяется равенством

$$\varepsilon=\frac{1}{29}|\bar{y}_k-y_k|. \quad (7)$$

Пример 3. Используя полученные в примере 2 методом Рунге—Кутта значения y_1, y_2, y_3, найти методом Милна значение y_4.

◀ Имеем $y_0=1{,}0000$; $y_1=1{,}0808$, $y_2=1{,}1737$, $y_3=1{,}2796$ и $h=0{,}075$. Вычисляя $\bar{y}_4$ и y_4 по формулам (6), получаем:

$$\bar{y}_4=1+\frac{4\cdot 0{,}075}{3}(2(0{,}075+1{,}0808)-(0{,}15+1{,}1737)+ +2(0{,}225+1{,}2796))=1{,}3997,$$

$$y_4=1{,}1737+\frac{0{,}075}{3}((0{,}15+1{,}1737)+4(0{,}225+1{,}2796)+ +(0{,}3+1{,}3997))=1{,}3997.$$

Поскольку $\bar{y}_4-y_4=0$, из формулы (7) заключаем, что в значении y_4 все знаки верные. ▶

В задачах 9.481—9.499 требуется найти с точностью до 0,0001 решение дифференциального уравнения 1-го порядка с указанными начальными условиями на заданном отрезке:

а) методом Эйлера с итерациями,
б) методом Рунге—Кутта,
в) методом Милна.

9.481. $y'=\frac{xy}{x^2+y^2}$, $y(0)=1$, $[0,\ 1]$.
9.482. $y'-2y=3e^x$, $y(0{,}3)=1{,}415$, $[0{,}3,\ 0{,}6]$.
9.483. $y'=x+y^2$, $y(0)=0$, $[0,\ 0{,}3]$.
9.484. $y'=y^2-x^2$, $y(1)=1$, $[1,\ 2]$.
9.485. $y'=x^2+y^2$, $y(0)=0{,}27$, $[0,\ 1]$.
9.486. $y'+xy(1-y^2)=0$, $y(0)=0{,}5$, $[0,\ 1]$.
9.487. $y'=x^2-xy+y^2$, $y(0)=0{,}1$, $[0,\ 1]$.
9.488. $y'=(2y-x)/y$, $y(1)=2$, $[1,\ 2]$.
9.489. $y'=x^2+xy+y^2+1$, $y(0)=0$, $[0,\ 1]$.
9.490. $y'+y=x^3$, $y(1)=-1$, $[1,\ 2]$.
9.491. $y'=xy+e^y$, $y(0)=0$, $[0,\ 0{,}1]$
9.492. $y'=2xy+x^2$, $y(0)=0$, $[0,\ 0{,}5]$.
9.493. $y'=x+\sin\frac{y}{3}$, $y(0)=1$, $[0,\ 2]$.
9.494. $y'=e^x-y^2$, $y(0)=0$, $[0,\ 0{,}4]$.
9.495. $y'=2x+\cos y$, $y(0)=0$, $[0,\ 0{,}1]$.
9.496. $y'=x^2+y^2$, $y(0)=0{,}5$, $[0,\ 0{,}5]$.
9.497. $y'=xy^3-y$, $y(0)=1$, $[0,\ 1]$.
9.498. $y'=y^2\cdot e^x-2y$, $y(0)=1$, $[0,\ 1]$.
9.499. $y'=\frac{1}{y^2-x}$, $y(1)=0$, $[1,\ 2]$.

В задачах 9.500—9.502 составить на фортране подпрограммы решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ указанными методами.

9.500. Метод Эйлера с итерациями. Параметры: F, X0, Y0, H, N, Y, где F — имя подпрограммы-функции для вычисления значений функции $f(x, y)$, X0 — начальное значение аргумента, Y0 — начальное значение функции, H — шаг вычислений, N — число значений искомой функции $y = y(x)$, Y — массив размера N значений функции $y = y(x)$.

9.501. Метод Рунге—Кутта. Параметры: F, X0, Y0, H, N, Y, EPS, где H — начальный шаг вычислений, EPS — заданная предельная абсолютная погрешность, входной параметр; остальные параметры, как в задаче 9.500.

9.502. Метод Милна. Параметры: F, X0, H, N, Y, EPS, где EPS — полученная при вычислениях предельная абсолютная погрешность, выходной параметр, N — число значений искомой функции, включая начальное. Остальные параметры, как в задаче 9.500. Первые четыре элемента массива Y должны быть определены перед обращением к подпрограмме.

В задачах 9.503—9.505 составить на фортране программу решения одной из задач 9.481—9.499, используя для этого одну из указанных подпрограмм.

9.503. Подпрограмма, полученная в задаче 9.500.

9.504. Подпрограмма, полученная в задаче 9.501.

9.505. Подпрограмма, полученная в задаче 9.502.

Рассмотренные выше методы могут быть использованы при решении задачи Коши для нормальной системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка и для дифференциального уравнения 2-го порядка.

Пример 4. Методом Эйлера с итерациями решить задачу Коши на отрезке [3, 4] с точностью до 10^{-2} для уравнения

$$y'' = -\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} + 1$$

при начальных условиях $y(3) = 6$, $y'(3) = 3$.

◀ Исходя из неравенства $h^2 < 0{,}01$, выберем шаг вычислений $h = 0{,}2$. Тогда $n = \dfrac{4-3}{0{,}2} = 5$.

Приводим уравнение 2-го порядка к системе двух уравнений 1-го порядка, введя новую функцию $p = y'$:

$$p' = -\frac{p}{x} + \frac{y^2}{x} + 1 = f(x, y, p),$$

$$y' = p = \varphi(x, y, p).$$

Начальные условия для данной системы: $y = 6$, $p = 3$ при $x = 3$.

Сохраняя один запасной знак, вычислим значения функций $p = p(x)$ и $y = y(x)$ в точках $x_1 = 3{,}2$, $x_2 = 3{,}4$, $x_3 = 3{,}6$, $x_4 = 3{,}8$, $x_5 = 4$ по формулам (1) и (2).

При $x_1 = 3{,}2$ имеем:

$$p_1^{(0)} = p_0 + h \cdot f(x_0, y_0, p_0) = 3 + 0{,}2\left(-\frac{3}{3} + \frac{6}{3^2} + 1\right) = 3{,}133,$$

$$y_1^{(0)} = y_0 + h \cdot \varphi(x_0, y_0, p_0) = y_0 + h \cdot p_0 = 6 + 0{,}2 \cdot 3 = 6{,}600,$$

$$p_1^{(1)} = p_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0, p_0) + f(x_1, y_1^{(0)}, p_1^{(0)})\right) =$$

$$= 3 + 0{,}1\left(\left(-\frac{3}{3} + \frac{6}{3^2} + 1\right) + \left(-\frac{3{,}133}{3{,}2} + \frac{6{,}600}{3{,}2^2} + 1\right)\right) = 3{,}133,$$

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left(\varphi(x_0, y_0, p_0) + \varphi(x_1, y_1^{(0)}, p_1^{(0)})\right) =$$

$$= y_0 + \frac{h}{2}\left(p_0 + p_1^{(0)}\right) = 6 + 0{,}1\,(3 + 3{,}133) = 6{,}613.$$

Получаем значения $p_1 = 3{,}133$ и $y_1 = 6{,}613$.

При $x_2 = 3{,}4$ имеем:

$$p_2^{(0)} = p_1 + h \cdot f(x_1, y_1, p_1) = 3{,}133 + 0{,}2\left(-\frac{3{,}133}{3{,}2} + \frac{6{,}613}{3{,}2^2} + 1\right) = 3{,}266,$$

$$y_2^{(0)} = y_1 + h \cdot \varphi(x_1, y_1, p_1) = y_1 + h \cdot p_1 = 6{,}613 + 0{,}2 \cdot 3{,}133 = 7{,}240,$$

$$p_2^{(1)} = p_1 + \frac{h}{2}\left(f(x_1, y_1, p_1) + f(x_2, y_2^{(0)}, p_2^{(0)})\right) =$$

$$= 3{,}133 + 0{,}1\left(\left(-\frac{3{,}133}{3{,}2} + \frac{6{,}613}{3{,}2^2} + 1\right) + \left(-\frac{3{,}266}{3{,}4} + \frac{7{,}240}{3{,}4^2} + 1\right)\right) = 3{,}266,$$

$$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2}\left(\varphi(x_2, y_1, p_1) + \varphi(x_2, y_2^{(0)}, p_2^{(0)})\right) =$$

$$= y_1 + \frac{h}{2}\left(p_1 + p_1^{(0)}\right) = 6{,}613 + 0{,}1\,(3{,}133 + 3{,}266) = 7{,}253.$$

Отсюда получаем значения $p_2 = 3{,}266$ и $y_2 = 7{,}253$.

Проведя аналогичные вычисления при $x_3 = 3{,}6$, $x_4 = 3{,}8$ и $x_5 = 4$, находим

$$p_3 = 3{,}399 \qquad y_3 = 7{,}920,$$
$$p_4 = 3{,}532, \qquad y_4 = 8{,}613,$$
$$p_5 = 3{,}665, \qquad y_5 = 9{,}333.$$

Округляя до сотых, получаем ответ: $y_0 = 6{,}00$, $y_1 = 6{,}61$, $y_2 = 7{,}25$, $y_3 = 7{,}92$, $y_4 = 8{,}61$, $y_5 = 9{,}33$. ▶

В задачах 9.506—9.511 требуется найти решение системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка или решение дифференциального уравнения 2-го порядка с точностью до 10^{-2} при указанных начальных условиях на данном отрезке:

9.506. $y' = \dfrac{z}{x}$, $z' = \dfrac{2z^2}{x(y-1)} + \dfrac{z}{x}$, $y(1) = 0$, $z(1) = \dfrac{1}{3}$, [1, 2].

9.507. $y'=(z-y)x,\ \ z'=(z+y)x,\ \ y(0)=1,\ \ z(0)=1,$ $[0,\ 1]$.

9.508. $y'=\cos(y+2z)+2,\ \ z'=\dfrac{2}{x+2y^2}+x+1,\ \ y(0)=$ $=1,\ z(0)=0{,}05,\ [0,\ 0{,}3]$.

9.509. $y'=e^{-(y^2+z^2)}+2x,\quad z'=2y^2+z,\quad y(0)=0{,}5,$ $z(0)=1,\ [0,\ 0{,}3]$.

9.510. $y''-y=e^x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0{,}5,\ [0,\ 1]$.

9.511. $y''-2y'=x^3-1,\ y(1)=-\dfrac{1}{6},\ y'(1)=-\dfrac{3}{4},\ [1,\ 2]$.

9.512. Составить на фортране подпрограмму решения методом Рунге—Кутта системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$y'=f(x,\ y,\ z),$$
$$z'=\varphi(x,\ y,\ z)$$

с начальными условиями $y(x_0)=y_0,\ z(x_0)=z_0$ на отрезке $[x_0,\ X]$. Параметры F, FI, X0, Y0, Z0, H, N, Y, Z, EPS, где F и FI — имена подпрограмм-функций для вычисления значений функций $f(x,\ y,\ z)$ и $\varphi(x,\ y,\ z)$, X0 — начальное значение аргумента $x=x_0$, Y0 и Z0 — начальные значения функций, H — начальный шаг вычислений, N — число значений искомых функций $y=y(x)$ и $z=z(x)$, Y и Z — массивы размера N значений функций $y=y(x)$ и $z=z(x)$, EPS — заданная предельная абсолютная погрешность.

9.513. Используя подпрограмму, полученную при решении задачи 9.512 составить на фортране программу решения одной из задач 9.506—9.511.

2. Краевая задача для линейного уравнения. Краевая задача для линейного дифференциального уравнения

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=f(x),$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ — некоторые непрерывные на отрезке $[a,\ b]$ функции, состоит в нахождении его решения $y=y(x)$, удовлетворяющего граничным условиям

$$\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)=A,$$
$$\beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=B,$$

где $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \beta_0,\ \beta_1,\ A,\ B$ — постоянные и $|\alpha_0|+|\alpha_1|\neq 0$, $|\beta_0|+|\beta_1|\neq 0$. Эта задача может быть решена численно методом конечных разностей, применяя который значения функции $y=y(x)$ находят из системы линейных уравнений $(n+1)$-го порядка вида:

$$\frac{y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k}{h^2}+p(x_k)\frac{y_{k+1}-y_k}{h}+q(x_k)\,y_k=f(x_k),\qquad (8)$$
$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-2,$$
$$\alpha_0 y_0+\alpha_1\frac{y_1-y_0}{h}=A,$$
$$\beta_0 y_n+\beta_1\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=B\qquad \left(h=\frac{b-a}{n}\right)$$

с $n+1$ неизвестными $y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_n$.

Пример 5. Решить краевую задачу для дифференциального уравнения

$$y''+x^2y+2=0$$

с граничными условиями $y(-1)=0,\ y(1)=0$ на отрезке $[-1,\ 1]$ методом конечных разностей, разбив этот отрезок на четыре равные части.

◀ Имеем: $n=4,\ h=0{,}5,\ y_0=0,\ y_4=0$. Следовательно, требуется вычислить три значения $y_1=y(-0{,}5)$, $y_2=y(0)$, $y_3=y(0{,}5)$. Составляем систему (8), полагая поочередно $k=0,\ 1,\ 2$:

$k=0$:

$$\frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}+x_1^2y_1+2=0,\ \text{ или }\ 4(y_2-2y_1+y_0)+\frac{1}{4}y_1=-2;$$

$k=1$:

$$\frac{y_3-2y_2+y_1}{h^2}+x_2^2y_2+2=0,\ \text{ или }\ 4(y_3-2y_2+y_1)=-2;$$

$k=2$:

$$\frac{y_4-2y_3+y_2}{h^2}+x_3^2y_3+2=0,\ \text{ или }\ 4(y_4-2y_3+y_2)+\frac{1}{4}y_3=-2.$$

Добавляя граничные условия, получаем следующую систему пяти уравнений относительно пяти неизвестных $y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$:

$$\begin{aligned}16y_0-31y_1+16y_2\qquad\qquad &=-8,\\ 2y_1-4y_2+2y_3\qquad &=-1,\\ 16y_2-31y_3+16y_4 &=-8,\\ y_0\qquad\qquad\qquad\qquad &=0,\\ y_4 &=0.\end{aligned}$$

Решая эту систему, находим $y_0=0,\ \ y_1=0{,}8,\ \ y_2=1{,}05,\ \ y_3=0{,}8,$ $y_4=0$. ▶

В задачах 9.514—9.519 требуется найти решение дифференциального уравнения 2-го порядка с указанными граничными условиями методом конечных разностей, разбив заданный отрезок на n равных частей.

9.514. $x^2y''-xy'=3x^3;\ \ y(1)=2,\ \ y(2)=9,\ [1,\ 2],\ n=4.$

9.515. $x^2y''+xy'-y=x^2;\qquad y(1)=1{,}333,\qquad y'(3)=3,$ $[1,\ 3],\ n=7.$

9.516. $y''+xy'+y=2x;\quad y(0)=1,\quad y(1)=0,\quad [0,\ 1],$ $n=10.$

9.517. $y''+y\operatorname{ch}x=0;\quad y(0)=0,\quad y(2,2)=1,\quad [0,\ 2,2],$ $n=11.$

9.518. $y''+(x-1)y'+3,125y=4x,\quad y(0)=1,\quad y(1)=$ $=1,368,\ [0,\ 1],\ n=10.$

9.519. $x^2y''-2y=0,\quad y(1)-2y'(1)=0,\quad y(2)=4,5,$ $[1,\ 2],\ n=5.$

9.520. Используя подпрограмму решения линейной системы алгебраических уравнений, полученную в задаче 8.265, составить на фортране программу решения одной из задач 9.514—9.519.