721. Доказать, что отношение двух любых линейно независимых решений уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (с непрерывными коэффициентами) не может иметь точек локального максимума.

722. Доказать, что в случае $q(x) > 0$ для любого решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$ отношение $y'(x)/y(x)$ убывает при возрастании x на интервале, где $y(x) \neq 0$.

723. Доказать, что в случае $q(x) \leqslant 0$ все решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$ с положительными начальными условиями $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$ остаются положительными при всех $x > x_0$.

724. Доказать, что решение уравнения $y'' - x^2y = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ есть четная функция, всюду положительная.

725*. Доказать, что в случае $q(x) \leqslant 0$ краевая задача

$$y'' + q(x)y = 0, \quad y(x_1) = a, \quad y(x_2) = b$$

при любых a, b и $x_1 \neq x_2$ имеет единственное решение. Доказать, что это решение — монотонная функция, если $b = 0$.

726. Найти расстояние между двумя соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения уравнения $y'' + my = 0$, где $m = \text{const} > 0$. Сколько нулей может содержаться на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$?

В задачах **727—730**, используя результат предыдущей задачи и теорему сравнения (см. [1], гл. VI, § 2, п. 3), оценить сверху и снизу расстояние между двумя соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения следующих уравнений на заданном отрезке.

727. $y'' + 2xy = 0$, $20 \leqslant x \leqslant 45$.
728. $xy'' + y = 0$, $25 \leqslant x \leqslant 100$.
729. $y'' - 2xy' + (x+1)^2 y = 0$, $4 \leqslant x \leqslant 19$.
730. $y'' - 2e^x y' + e^{2x} y = 0$, $2 \leqslant x \leqslant 6$.

731*. Доказать, что любое решение уравнения $y'' + xy = 0$ на отрезке $-25 \leqslant x \leqslant 25$ имеет не менее 15 нулей.

732. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — расположенные в порядке возрастания последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$, где $q(x) > 0$; при $x_1 \leqslant x < \infty$

функция $q(x)$ непрерывна и возрастает. Доказать, что $x_{n+1} - x_n < x_n - x_{n-1}$ (т. е. расстояние между соседними нулями убывает).

733. В предыдущей задаче обозначим через c конечный или бесконечный предел функции $q(x)$ при $x \to \infty$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = \pi/\sqrt{c}$.

734*. Пусть y и z — решения уравнений $y'' + q(x)y = 0$ и $z'' + Q(x)z = 0$ с совпадающими начальными условиями $y(x_0) = z(x_0)$, $y'(x_0) = z'(x_0)$, и на интервале (x_0, x_1) имеем $Q(x) > q(x)$, $y(x) > 0$, $z(x) > 0$. Доказать, что на этом интервале отношение $z(x)/y(x)$ убывает.

735*. Пусть выполнены условия задачи **732** и пусть $b_n = \max\limits_{x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}} |y(x)|$. Доказать, что $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$

736*. Пусть в задаче **733** предел c конечный. Доказать, что $b_n \to B > 0$ при $n \to \infty$ (в обозначениях задачи **735**).

737*. Заменой независимого переменного $t = \varphi(x)$ привести уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} \pm \frac{y}{(\psi(x))^4} = 0$ к виду $\frac{d^2y}{dt^2} + b(t)\frac{dy}{dt} \pm y = 0$, затем избавиться от первой производной заменой $y = a(t)u$. (Это преобразование называется преобразованием Лиувилля. Во многих случаях оно позволяет привести уравнение $y'' + q(x)y = 0$ к уравнению аналогичного вида, но с «почти постоянным» (слабо меняющимися на интервале (t_0, ∞)) коэффициентом при y. Это облегчает исследование асимптотического поведения решения при $x \to \infty$.)

В задачах **738—748** исследовать асимптотическое поведение при $x \to +\infty$ решений данных уравнений, пользуясь преобразованием Лиувилля (см. задачу 737) и утверждениями п. 4 (стр. 49).

738. $y'' + x^4 y = 0$.
739. $y'' - x^2 y = 0$.
740. $y'' + x^2 y = 0$.
741. $y'' + e^{2x} y = 0$.
742. $xy'' - y = 0$.
743. $y'' - xy = 0$.
744. $xy'' + 2y' + y = 0$.
745. $y'' - 2(x-1)y' + x^2 y = 0$.
746*. $y'' + (x^4 + 1)y = 0$.
747*. $(x^2 + 1)y'' - y = 0$.
748*. $x^2 y'' + y \ln^2 x = 0$.

В задачах **749—750** получить более точное асимптотическое представление решений данных уравнений, применяя два раза преобразование Лиувилля.

749.* $y'' - 4x^2 y = 0$. **750*.** $xy'' + y = 0$.

§ 13. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Для отыскания решения краевой задачи

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f(x), \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \tag{1}$$

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0, \qquad \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0 \tag{2}$$

надо подставить общее решение уравнения (1) в краевые условия (2) и из этих условий определить (если это возможно) значения произвольных постоянных, входящих в формулу общего решения. В отличие от задачи с начальными условиями (задачи Коши), краевая задача не всегда имеет решение.

2. Функцией Грина краевой задачи (1), (2) называется функция $G(x, s)$, определенная при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $x_0 < s < x_1$, и при каждом фиксированном s из интервала (x_0, x_1) обладающая свойствами (как функция от x):

1) при $x \neq s$ она удовлетворяет уравнению

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0; \tag{3}$$

2) при $x = x_0$ и $x = x_1$ она удовлетворяет заданным краевым условиям (2);

3) при $x = s$ она непрерывна по x, а ее производная по x имеет скачок, равный $1/a_0(s)$, т. е.

$$G(s+0, s) = G(s-0, s), \qquad G'_x\big|_{x=s+0} = G'_x\big|_{x=s-0} + \frac{1}{a_0(s)}. \tag{4}$$

Чтобы найти функцию Грина краевой задачи (1), (2), надо найти два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (отличные от $y(x) \equiv 0$) уравнения (3), удовлетворяющие соответственно первому и второму из граничных условий (2). Если $y_1(x)$ не удовлетворяет сразу обоим краевым условиям, то функция Грина существует и ее можно искать в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} a y_1(x) & (x_0 \leqslant x \leqslant s), \\ b y_2(x) & (s \leqslant x \leqslant x_1). \end{cases} \tag{5}$$

Функции a и b зависят от s и определяются из требования, чтобы функция (5) удовлетворяла условиям (4), т. е.

$$b y_2(s) = a y_1(s), \qquad b y_2'(s) = a y_1'(s) + \frac{1}{a_0(s)}.$$

3. Если функция Грина $G(x, s)$ существует, то решение краевой задачи (1), (2) выражается формулой

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s)\, f(s)\, ds.$$

4. Собственным значением задачи

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = \lambda y, \tag{6}$$

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0, \qquad \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0 \tag{7}$$

называется такое число λ, при котором уравнение (6) имеет решение $y(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющее краевым условиям (7). Это решение $y(x)$ называется собственной функцией.

Найти решения уравнений **751—762**, удовлетворяющие указанным краевым условиям.

751. $y'' - y = 2x$; $y(0) = 0$, $y(1) = -1$.
752. $y'' + y' = 1$; $y'(0) = 0$, $y(1) = 1$.
753. $y'' - y' = 0$; $y(0) = -1$, $y'(1) - y(1) = 2$.
754. $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
755. $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
756. $y'' + y = 2x - \pi$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
757. $y'' - y' - 2y = 0$; $y'(0) = 2$, $y(+\infty) = 0$.
758. $y'' - y = 1$; $y(0) = 0$, $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$.
759. $y'' - 2iy = 0$; $y(0) = -1$, $y(+\infty) = 0$.
760. $x^2 y'' - 6y = 0$; $y(0)$ ограничено, $y(1) = 2$.
761. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$; $y(x) = o(x)$ при $x \to 0$, $y(1) = 3$.
762. $x^2 y'' + 5xy' + 3y = 0$; $y'(1) = 3$, $y(x) = O(x^{-2})$ при $x \to +\infty$.

763*. При каких a краевая задача $y'' + ay = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ не имеет решений?

Для каждой из краевых задач **764—779** построить функцию Грина.

764. $y'' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.
765. $y'' + y = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
766. $y'' + y' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.
767. $y'' - y = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y'(2) + y(2) = 0$.
768*. $y'' + y = f(x)$; $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$.
769. $x^2 y'' + 2xy' = f(x)$; $y(1) = 0$, $y'(3) = 0$.
770. $xy'' - y' = f(x)$; $y'(1) = 0$, $y(2) = 0$.
771. $x^2 y'' - 2y = f(x)$; $y(1) = 0$, $y(2) + 2y'(2) = 0$.

772. $y''=f(x)$; $y(0)=0$, $y(x)$ ограничено при $x\to+\infty$.

773. $y''+y'=f(x)$; $y'(0)=0$, $y(+\infty)=0$.

774. $xy''+y'=f(x)$; $y(1)=0$, $y(x)$ ограничено при $x\to+\infty$.

775. $y''+4y'+3y=f(x)$; $y(0)=0$, $y(x)=O(e^{-2x})$ при $x\to+\infty$.

776. $x^2y''+xy'-y=f(x)$; $y(1)=0$, $y(x)$ ограничено при $x\to+\infty$.

777. $x^2y''+2xy'-2y=f(x)$; $y(0)$ ограничено, $y(1)=0$.

778. $y''-y=f(x)$, $y(x)$ ограничено при $x\to\pm\infty$.

779. $x^2y''-2y=f(x)$, $y(x)$ ограничено при $x\to 0$ и при $x\to+\infty$.

780. При каких a существует функция Грина краевой задачи $y''+ay=f(x)$, $y(0)=0$, $y(1)=0$?

781*. Оценить сверху и снизу решение задачи $x^2y''+2xy'-2y=f(x)$, $y(x)$ ограничено при $x\to 0$ и $x\to+\infty$, и его первую производную, если известно, что $0\leqslant f(x)\leqslant m$.

Указание. Записать решение с помощью функции Грина.

В задачах 782—785 найти собственные значения и собственные функции.

782. $y''=\lambda y$; $y(0)=0$, $y(l)=0$.

783. $y''=\lambda y$; $y'(0)=0$, $y(l)=0$.

784. $y''=\lambda y$; $y(0)=0$, $y'(l)=0$.

785. $x^2y''=\lambda y$; $y(1)=0$, $y(a)=0$ $(a>1)$.

§ 14. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Путем исключения неизвестных систему, вообще говоря, можно свести к уравнению более высокого порядка с одной неизвестной функцией (см. [1], гл. VII, § 1, п. 2 или [4], гл. 3, § 2). Этот способ удобен для решения лишь несложных систем.

Пример. Решить систему $\dot{x}=y+1$, $\dot{y}=2e^t-x$. Исключаем y. Из первого уравнения имеем $y=\dot{x}-1$. Подставляя во второе уравнение, получаем $\ddot{x}=2e^t-x$. Решив это уравнение второго порядка (методами § 11), найдем $x=C_1\cos t+C_2\sin t+e^t$. Значит, $y=\dot{x}-1=-C_1\sin t+C_2\cos t+e^t-1$.

2. Для решения системы $\left(\text{где } \dot{x} \text{ означает } \dfrac{dx}{dt}\right)$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_n=a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n,\end{cases}\qquad(1)$$

или, в векторной записи, $\dot{x}=Ax$, где x — вектор, A — матрица:

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}a_{11}&\ldots&a_{1n}\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ a_{n1}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

надо найти корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0.\qquad(2)$$

Каждому простому корню λ_i характеристического уравнения соответствует решение $C_iv^ie^{\lambda_it}$, где C_i — произвольная постоянная, v^i — собственный вектор матрицы A, соответствующий этому λ_i.

Если для кратного корня λ имеется столько линейно независимых собственных векторов $v^1,\ldots,v^k$, какова его кратность, то ему соответствует решение $C_1v^1e^{\lambda t}+\ldots+C_kv^ke^{\lambda t}$.

Если для корня λ кратности k имеется только m линейно независимых собственных векторов, и $m<k$, то решение, соответствующее этому λ, можно искать в виде произведения многочлена степени $k-m$ на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде *)

$$\begin{cases}x_1=(a+bt+\ldots+dt^{k-m})e^{\lambda t},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n=(p+qt+\ldots+st^{k-m})e^{\lambda t}.\end{cases}\qquad(3)$$

Чтобы найти коэффициенты $a, b, \ldots, s$ надо подставить решение (3) в систему (1). Приравняв коэффициенты подобных членов в левой и правой частях уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $a, b, \ldots, s$. Надо найти общее решение этой системы. Коэффициенты $a, b, \ldots, s$ должны зависеть от k произвольных постоянных, где k — кратность корня λ.

Найдя для каждого λ решения указанного вида и сложив их, получим общее решение системы (1).

Пример. Решить систему

$$\dot{x}=2x+y+z,\quad \dot{y}=-2x-z,\quad \dot{z}=2x+y+2z.\qquad(4)$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ -2 & -\lambda & -1\\ 2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0,\qquad(5)$$

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0,\quad \lambda_1=2,\quad \lambda_2=\lambda_3=1.$$

*) В случае $k\leqslant 3$ число $k-m$ нельзя уменьшить, а в случае $k\geqslant 4$ иногда можно, если известна жорданова форма матрицы A.

Для простого корня $\lambda_1 = 2$ находим собственный вектор (α, β, γ), решая систему

$$\left\{\begin{aligned} \beta + \gamma &= 0, \\ -2\alpha - 2\beta - \gamma &= 0, \\ 2\alpha + \beta \quad &= 0 \end{aligned}\right. \tag{6}$$

(коэффициенты этой системы равны элементам детерминанта (5) при $\lambda = 2$). Из (6) находим $2\alpha = -\beta = \gamma$. Значит, вектор $(1, -2, 2)$ — собственный, и

$$x = e^{2t}, \quad y = -2e^{2t}, \quad z = 2e^{2t} \tag{7}$$

— частное решение системы (4).

Для кратного корня $\lambda = 1$ сначала определим число линейно независимых собственных векторов. При $\lambda = 1$ из (5) получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее порядок $n = 3$, ранг $r = 2$. Число линейно независимых собственных векторов равно $m = n - r = 1$. Корень $\lambda = 1$ имеет кратность $k = 2$. Так как $k > m$, то решение надо искать в виде произведения многочлена степени $k - m = 1$ на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде

$$x = (a + bt)\, e^t, \quad y = (c + dt)\, e^t, \quad z = (f + gt)\, e^t. \tag{8}$$

Чтобы найти коэффициенты $a, b, \ldots$ подставляем (8) в систему (4) и приравниваем коэффициенты при подобных членах. Получаем систему

$$\begin{aligned} b + d + g &= 0, & b &= a + c + f, \\ -2b - d - g &= 0, & d &= -2a - c - f, \\ 2b + d + g &= 0, & g &= 2a + c + f. \end{aligned} \tag{9}$$

Найдем общее решение этой системы. Из двух левых уравнений имеем $b = 0$, $g = -d$. Подставляя это в остальные уравнения, получаем

$$0 = a + c + f, \quad d = -2a - c - f \tag{10}$$

(остальные уравнения будут следствиями написанных). Решаем систему (10), например, относительно a и f:

$$a = -d, \quad f = d - c.$$

Таким образом, все неизвестные выражены через c и d. Положив $c = C_1$, $d = C_2$, имеем $a = -C_2$, $b = 0$, $f = C_2 - C_1$, $g = -C_2$. Общее решение системы (9) найдено.

Подставив найденные значения $a, b, \ldots$ в (8) и прибавив частное решение (7), умноженное на C_3, получим общее решение системы (4):

$$x = -C_2 e^t + C_3 e^{2t}, \quad y = (C_1 + C_2 t)\, e^t - 2C_3 e^{2t},$$
$$z = (C_2 - C_1 - C_2 t)\, e^t + 2C_3 e^{2t}.$$

3. Другой способ решения системы (1). Для любой матрицы существует базис, в котором матрица имеет жорданову форму. Каждой клетке порядка $p \geqslant 1$ жордановой формы соответствует серия $h_1, h_2, \ldots, h_p$ векторов базиса, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned} Ah_1 &= \lambda h_1, \qquad h_1 \neq 0, \\ Ah_2 &= \lambda h_2 + h_1, \\ Ah_3 &= \lambda h_3 + h_2, \\ &\cdots\cdots \\ Ah_p &= \lambda h_p + h_{p-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Вектор h_1 называется собственным, а $h_2, h_3, \ldots, h_p$ — присоединенными. Каждой серии $h_1, h_2, \ldots, h_p$ соответствует p линейно независимых решений $x^1, x^2, \ldots, x^p$ системы $\dot{x} = Ax$ (верхний индекс указывает номер решения):

$$\begin{aligned} x^1 &= e^{\lambda t} h_1, \\ x^2 &= e^{\lambda t} \left(\frac{t}{1!} h_1 + h_2 \right), \\ x^3 &= e^{\lambda t} \left(\frac{t^2}{2!} h_1 + \frac{t}{1!} h_2 + h_3 \right), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x^p &= e^{\lambda t} \left(\frac{t^{p-1}}{(p-1)!} h_1 + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} h_2 + \ldots + \frac{t}{1!} h_{p-1} + h_p \right). \end{aligned} \tag{12}$$

Общее число всех таких решений равно сумме порядков всех клеток жордановой формы, т. е. порядку матрицы. Они составляют фундаментальную систему решений системы $\dot{x} = Ax$.

П р а в и л о д л я з а п о м и н а н и я ф о р м у л (12). Собственному вектору h_1 соответствует решение $x^1 = e^{\lambda t} h_1$. Если везде отбросить $e^{\lambda t}$, то каждая строка правой части (12) получится интегрированием по t предыдущей строки, причем постоянную интегрирования надо взять равной следующему по порядку вектору серии.

4. В случае, когда имеются комплексные корни λ, изложенные способы дают выражение решения через комплексные функции. Если при этом коэффициенты системы (1) вещественны, то можно выразить решение только через вещественные функции. Для этого надо воспользоваться тем, что вещественная и мнимая части комплексного решения, соответствующего корню $\lambda = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$, являются линейно независимыми решениями.

П р и м е р. Решить систему $\dot{x} = 4x - y$, $\dot{y} = 5x + 2y$.

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0, \quad \lambda = 3 \pm 2i.$$

Для корня $\lambda = 3 + 2i$ находим собственный вектор (a, b):

$$\left\{\begin{aligned} (1 - 2i)\, a - \qquad\quad b &= 0, \\ 5a - (1 + 2i)\, b &= 0. \end{aligned}\right.$$

Можно взять $a = 1$, $b = 1 - 2i$. Имеем частное решение

$$x = e^{(3+2i)t}, \quad y = (1 - 2i)\, e^{(3+2i)t}.$$

Так как данная система с вещественными коэффициентами, то решение, соответствующее корню $\lambda = 3 - 2i$, можно не искать, оно будет комплексно сопряженным с найденным решением. Чтобы получить два вещественных решения, надо взять вещественную и мнимую части найденного комплексного решения. Так как $e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\cos 2t + i \sin 2t)$, то

$$\begin{cases} x_1 = \operatorname{Re} e^{(3+2i)t} = e^{3t} \cos 2t, \\ y_1 = \operatorname{Re}(1 - 2i)\, e^{(3+2i)t} = e^{3t} (\cos 2t + 2 \sin 2t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \operatorname{Im} e^{(3+2i)t} = e^{3t} \sin 2t, \\ y_2 = \operatorname{Im}(1 - 2i)\, e^{(3+2i)t} = e^{3t} (\sin 2t - 2 \cos 2t). \end{cases}$$

Общее решение выражается через два найденных линейно независимых решения:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^{3t} \cos 2t + C_2 e^{3t} \sin 2t,$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{3t} (\cos 2t + 2 \sin 2t) + C_2 e^{3t} (\sin 2t - 2 \cos 2t).$$

5. Чтобы решить систему

$$\begin{cases} a_{10} x^{(n)} + a_{11} x^{(n-1)} + \ldots + a_{1n} x + b_{10} y^{(n)} + b_{11} y^{(n-1)} + \ldots \\ \qquad \ldots + b_{1n} y = 0, \\ a_{20} x^{(n)} + a_{21} x^{(n-1)} + \ldots + a_{2n} x + b_{20} y^{(n)} + b_{21} y^{(n-1)} + \ldots \\ \qquad \ldots + b_{2n} y = 0, \end{cases}$$

не приведенную к нормальному виду, надо составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{10}\lambda^n + a_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{1n} & b_{10}\lambda^n + b_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{1n} \\ a_{20}\lambda^n + a_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{2n} & b_{20}\lambda^n + b_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{2n} \end{vmatrix} = 0$$

и найти его корни. После этого решение отыскивается тем же способом, как в п. 2.

Аналогично решаются системы трех и более уравнений.

6. Частное решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n + f_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{13}$$

можно искать методом неопределенных коэффициентов в том случае, когда функции $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций $b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m$, $e^{\alpha t}$, $\cos \beta t$, $\sin \beta t$. Это делается по тем же правилам, что для одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, см. п. 2 § 11, со следующим изменением. Если $f_i(t) = P_{m_i}(t)\, e^{\gamma t}$, где $P_{m_i}(t)$ — многочлен степени m_i, то частное решение системы (13) ищется не в виде

$t^s Q_m(t)\, e^{\gamma t}$, а в виде

$$x_i = Q^i_{m+s}(t)\, e^{\gamma t}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где $Q^i_{m+s}(t)$ — многочлены степени $m + s$ с неизвестными коэффициентами, $m = \max m_i$, $s = 0$, если γ — не корень характеристического уравнения (2), а если γ — корень, то s можно взять равным кратности этого корня (или, точнее, s на 1 больше наибольшей из степеней многочленов, на которые умножается $e^{\gamma t}$ в общем решении однородной системы). Неизвестные коэффициенты многочленов определяются путем подстановки выражений (14) в данную систему (13) и сравнения коэффициентов подобных членов.

Аналогично определяются степени многочленов и в случае, когда $f_i(t)$ содержат $e^{\alpha t} \cos \beta t$ и $e^{\alpha t} \sin \beta t$, а число $\gamma = \alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + e^{3t}(t + \sin t), \\ \dot{y} = x + 2y + t e^{3t} \cos t. \end{cases} \tag{15}$$

Сначала для однородной системы $\dot{x} = 4x - y$, $\dot{y} = x + 2y$, находим корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ и как в п. 2 отыскиваем общее решение

$$x_0 = (C_1 t + C_2)\, e^{3t}, \quad y_0 = (C_1 t + C_2 - C_1)\, e^{3t}.$$

В системе (15) для функций $t e^{3t}$, $e^{3t} \sin t$, $t e^{3t} \cos t$ числа $\alpha + \beta i$ соответственно равны 3, $3 + i$, $3 + i$. Поэтому надо отдельно найти частные решения систем

$$\dot{x} = 4x - y + t e^{3t}, \qquad \dot{y} = x + 2y, \tag{16}$$

$$\dot{x} = 4x - y + e^{3t} \sin t, \qquad \dot{y} = x + 2y + t e^{3t} \cos t. \tag{17}$$

Для системы (16) $\alpha + \beta i = 3 = \lambda_1 = \lambda_2$, $s = 2$, $m = 1$. Согласно (14), частное решение можно искать в виде

$$x_1 = (at^3 + bt^2 + ct + d)\, e^{3t}, \quad y_1 = (ft^3 + gt^2 + ht + j)\, e^{3t}.$$

Для системы (17) $\alpha + \beta i = 3 + i \neq \lambda_{1,2}$, $s = 0$, $m = 1$. Частное решение имеет вид

$$x_2 = (kt + l)\, e^{3t} \sin t + (mt + n)\, e^{3t} \cos t,$$

$$y_2 = (pt + q)\, e^{3t} \sin t + (rt + s)\, e^{3t} \cos t.$$

Отыскав значения коэффициентов $a, b, \ldots$, общее решение системы (15) напишем в виде

$$x = x_0 + x_1 + x_2, \quad y = y_0 + y_1 + y_2.$$

7. Решение неоднородной системы

$$\dot{x}_i = a_{i1}(t)\, x_1 + \ldots + a_{in}(t)\, x_n + f_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n$$

можно найти методом вариации постоянных, если известно общее решение однородной системы с теми же коэффициентами $a_{ik}(t)$. Для этого в формуле общего решения однородной системы надо заменить произвольные постоянные C_i на неизвестные функции $C_i(t)$. Полученные выражения для x_i надо подставить в данную неоднородную систему, и из этой системы найти $C_i(t)$.

8. Показательной функцией e^A матрицы A называется сумма ряда

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots, \tag{18}$$

где E — единичная матрица. Ряд сходится для любой матрицы A.

Свойства e^A:

а) если $A = CMC^{-1}$, то $e^A = Ce^MC^{-1}$;

б) если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$;

в) матрица $X(t) = e^{tA}$ удовлетворяет уравнению $\frac{dX}{dt} = AX$; $X(0) = E$.

Методы отыскания e^A:

1) Путем решения системы дифференциальных уравнений. В силу свойства в) i-й столбец матрицы e^{tA} есть решение системы уравнений (в векторной записи) $\dot{x} = Ax$ с начальными условиями $x_i(0) = 1$, $x_k(0) = 0$ при $k \neq i$ (x_i — i-я координата вектора x).

2) Путем приведения матрицы к жордановой форме. Пусть известна такая матрица C, что $C^{-1}AC = M$ имеет жорданову форму, т. е. состоит из клеток K_i. Каждая жорданова клетка имеет вид $K = \lambda E + F$, у матрицы F все элементы нули, кроме 1-го косого ряда над диагональю. Поэтому $F^m = 0$, где m — порядок матрицы F, и e^F легко найти с помощью ряда (18). Так как еще $e^{\lambda E} = e^{\lambda}E$, то

$$e^K = e^{\lambda E + F} = e^{\lambda E} \cdot e^F = e^{\lambda}E \cdot e^F = e^{\lambda}e^F.$$

Составив из клеток e^{K_i} матрицу e^M, найдем e^A с помощью свойства а). Доказательство и пример см. в [5], гл. 1, §§ 12—14.

В задачах **786—812** решить данные системы уравнений ($\dot{x}$ означает $\frac{dx}{dt}$, и т. д.; для облегчения работы в некоторых задачах указаны корни характеристического уравнения).

786. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$ **787.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$

788. $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$ **789.** $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

790. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$ **791.** $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$

792. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$ **793.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

794. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$ **795.** $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + y = 0. \end{cases}$

796. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1)$.

797. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1)$.

798. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3)$.

799. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 5)$.

800. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x, \\ \dot{y} = z + x, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1)$.

801. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$.

802. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x \end{cases}$ $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 3 \pm i)$.

803. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm i)$.

804. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 3)$.

805. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$ $(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$.

806. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$.

807. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -5)$.

808. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2z - y \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2)$.

809. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$.

810. $\begin{cases} \dot x = 2x + y, \\ \dot y = 2y + 4z, \\ \dot z = x - z \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 3)$.

811. $\begin{cases} \dot x = 2x - y - z, \\ \dot y = 2x - y - 2z, \\ \dot z = 2z - x + y \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$.

812. $\begin{cases} \dot x = 4x - y, \\ \dot y = 3x + y - z, \\ \dot z = x + z \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2)$.

В задачах **813—825** решить системы, не приведенные к нормальному виду.

813. $\begin{cases} \ddot x = 2x - 3y, \\ \ddot y = x - 2y. \end{cases}$ **814.** $\begin{cases} \ddot x = 3x + 4y, \\ \ddot y = -x - y. \end{cases}$

815. $\begin{cases} \ddot x = 2y, \\ \ddot y = -2x. \end{cases}$ **816.** $\begin{cases} \ddot x = 3x - y - z, \\ \ddot y = -x + 3y - z, \\ \ddot z = -x - y + 3z. \end{cases}$

817. $\begin{cases} 2\dot x - 5\dot y = 4y - x, \\ 3\dot x - 4\dot y = 2x - y. \end{cases}$ **818.** $\begin{cases} \ddot x + \dot x + \dot y - 2y = 0, \\ \dot x - \dot y + x = 0. \end{cases}$

819. $\begin{cases} \ddot x - 2\ddot y + \dot y + x - 3y = 0, \\ 4\ddot y - 2\ddot x - \dot x - 2x + 5y = 0. \end{cases}$

820. $\begin{cases} \ddot x - x + 2\ddot y - 2y = 0, \\ \dot x - x + \dot y + y = 0. \end{cases}$ **821.** $\begin{cases} \ddot x - 2\dot y + 2x = 0, \\ 3\dot x + \ddot y - 8y = 0. \end{cases}$

822. $\begin{cases} \ddot x + 3\ddot y - x = 0, \\ \dot x + 3\dot y - 2y = 0. \end{cases}$ **823.** $\begin{cases} \ddot x + 5\dot x + 2\dot y + y = 0, \\ 3\ddot x + 5x + \dot y + 3y = 0. \end{cases}$

824. $\begin{cases} \ddot x + 4\dot x - 2x - 2\dot y - y = 0, \\ \ddot x - 4\dot x - \ddot y + 2\dot y + 2y = 0. \end{cases}$

825. $\begin{cases} 2\ddot x + 2\dot x + x + 3\ddot y + \dot y + y = 0, \\ \ddot x + 4\dot x - x + 3\ddot y + 2\dot y - y = 0. \end{cases}$

В задачах **826—845** решить линейные неоднородные системы.

826. $\begin{cases} \dot x = y + 2e^t, \\ \dot y = x + t^2. \end{cases}$ **827.** $\begin{cases} \dot x = y - 5\cos t, \\ \dot y = 2x + y. \end{cases}$

828. $\begin{cases} \dot x = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot y = x + 2y. \end{cases}$ **829.** $\begin{cases} \dot x = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot y = 2x - 2y. \end{cases}$

830. $\begin{cases} \dot x = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot y = y - 2x. \end{cases}$ **831.** $\begin{cases} \dot x = 2y - x + 1, \\ \dot y = 3y - 2x. \end{cases}$

832. $\begin{cases} \dot x = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot y = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$ **833.** $\begin{cases} \dot x = 2x + y + e^t, \\ \dot y = -2x + 2t. \end{cases}$

834. $\begin{cases} \dot x = x + 2y, \\ \dot y = x - 5\sin t. \end{cases}$ **835.** $\begin{cases} \dot x = 2x - 4y, \\ \dot y = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$

836. $\begin{cases} \dot x = 2x - y, \\ \dot y = y - 2x + 18t. \end{cases}$ **837.** $\begin{cases} \dot x = x + 2y + 16te^t, \\ \dot y = 2x - 2y. \end{cases}$

838. $\begin{cases} \dot x = 2x + 4y - 8, \\ \dot y = 3x + 6y. \end{cases}$ **839.** $\begin{cases} \dot x = 2x - 3y, \\ \dot y = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

840. $\begin{cases} \dot x = x - y + 2\sin t, \\ \dot y = 2x - y. \end{cases}$ **841.** $\begin{cases} \dot x = 2x - y, \\ \dot y = x + 2e^t. \end{cases}$

842. $\begin{cases} \dot x = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot y = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$ **843.** $\begin{cases} \dot x = 2x + y + 2e^t, \\ \dot y = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

844. $\begin{cases} \dot x = x - y + 8t, \\ \dot y = 5x - y. \end{cases}$ **845.** $\begin{cases} \dot x = 2x - y, \\ \dot y = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$

В задачах **846—850** данные системы решить методом вариации постоянных.

846. $\begin{cases} \dot x = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot y = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$ **847.** $\begin{cases} \dot x = 2y - x, \\ \dot y = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$

848. $\begin{cases} \dot x = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot y = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$ **849.** $\begin{cases} \dot x = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot y = 2x - y. \end{cases}$

850. $\begin{cases} \dot x = 3x - 2y, \\ \dot y = 2x - y + 15e^t \sqrt{t}. \end{cases}$

Решить системы **851—866**, записанные в векторной форме: $\dot x = Ax$, где x — вектор, A — данная матрица.

851. $\dot x = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **852.** $\dot x = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

853. $\dot x = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. **854.** $\dot x = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

855. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

856. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$

857. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

858. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

859. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

860. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

861. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$ **862.** $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

863. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

864. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

865. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

866. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

В задачах **867—873** найти показательную функцию e^A данной матрицы A.

867. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$ **868.** $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$ **869.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

870. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$ **871.** $A=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

872. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$ **873.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

В задачах **874** и **875** найти $\det e^A$, не вычисляя матрицу e^A.

874. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$ **875.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$

876. Тело массы m движется на плоскости x, y, притягиваясь к точке (0,0) с силой a^2mr, где r — расстояние до этой точки. Найти движение тела при начальных условиях $x(0)=d$, $y(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$, $\dot{y}(0)=v$ и траекторию этого движения.

877. Один конец пружины закреплен неподвижно в точке 0, а к другому прикреплен груз массы $3m$, соединенный другой пружиной с грузом массы $2m$. Оба груза двигаются без трения по одной прямой, проходящей через точку 0. Каждая из пружин растягивается на величину x под действием силы a^2mx. Найти возможные периодические движения системы.

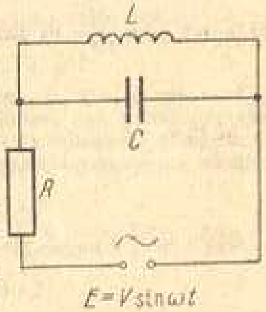


Рис. 4.

878. На концах вала закреплены два шкива, моменты инерции которых I_1 и I_2. При повороте одного шкива относительно другого на любой угол φ вследствие деформации вала возникают упругие силы с крутящим моментом $K\varphi$. Найти частоту крутильных колебаний вала при отсутствии внешних сил.

879. К источнику тока с напряжением $E=V\sin\omega t$ последовательно присоединено сопротивление R. Далее цепь разветвляется на две ветви, в одной из которых включена самоиндукция L, а в другой — емкость C (рис. 4). Найти силу тока в цепи (установившийся режим), проходящего через сопротивление R. При какой частоте ω сила тока наибольшая? Наименьшая?

Указание. О составлении дифференциальных уравнений в задачах об электрических цепях см. п. 5 § 11.

880*. Какое условие достаточно наложить на собственные значения матрицы A, чтобы система уравнений (в векторной записи) $\dot{x} = Ax + f(t)$ имела периодическое решение при всякой непрерывной вектор-функции $f(t)$ периода ω?

Указание. Применив метод вариации постоянных в векторной форме, выразить общее решение через фундаментальную матрицу e^{tA}, функцию $f(t)$ и начальные условия. Воспользоваться условием периодичности.

§ 15. УСТОЙЧИВОСТЬ

1. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

или, в векторной записи

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Пусть все f_i и $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ непрерывны при $t_0 \leqslant t < \infty$.

Решение $x = \varphi(t)$ системы (2) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого решения $x(t)$ той же системы, начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta, \tag{3}$$

при всех $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство

$$|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Если же для некоторого $\varepsilon > 0$ такого δ не существует, то решение $\varphi(t)$ называется неустойчивым.

Решение $\varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, все решения с достаточно близкими начальными условиями неограниченно приближаются к $\varphi(t)$ при $t \to +\infty$, т. е. если из неравенства (3) следует $x(t) - \varphi(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$.

Наличие или отсутствие устойчивости не зависит от выбора t_0.

Вопрос об устойчивости данного решения $x = \varphi(t)$ системы (2) сводится к вопросу об устойчивости нулевого решения $y(t) \equiv 0$ другой системы, получаемой из (2) заменой искомой функции $x - \varphi(t) = y$.

2. Исследование на устойчивость по первому приближению. Пусть $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ — решение системы (1). Чтобы его исследовать на устойчивость, надо выделить из функций f_i линейную часть вблизи точки $x_1 = \ldots$

$\ldots = x_n = 0$, например, по формуле Тейлора. Полученную систему часто можно исследовать с помощью следующей теоремы.

Теорема Ляпунова. *Рассмотрим систему*

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + \psi_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где a_{ik} — постоянные, а ψ_i — бесконечно малые выше первого порядка, точнее, при $|x| < \varepsilon_0$

$$|\psi_i| \leqslant \gamma(x)|x|, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \gamma(x) \to 0 \ \ \text{при} \ \ |x| \to 0, \tag{5}$$

где $|x| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$.

Тогда если все собственные значения матрицы (a_{ik}), $i, k = 1, \ldots, n$, имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво; если же хоть одно собственное значение имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение неустойчиво.

Пример. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y}, \\ \dot{y} = \sin ax + \ln(1 - 4y), \quad a = \text{const}. \end{cases}$$

Выделяя линейную часть функций по формуле Тейлора, получаем

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + \psi_1(x, y), \\ \dot{y} = ax - 4y + \psi_2(x, y), \end{cases}$$

где функции ψ_1 и ψ_2 равны $O(x^2 + y^2)$ и, значит, удовлетворяют условию (5). Находим собственные значения матрицы коэффициентов

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ a & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda^2 + 6\lambda + 8 + a = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1 - a}.$$

При $a > 1$ корни комплексные, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -3 < 0$, а при $-8 < a \leqslant 1$ корни вещественные отрицательные, значит, в этих случаях нулевое решение асимптотически устойчиво.

При $a < -8$ один корень положителен, значит, нулевое решение неустойчиво.

При $a = -8$ имеем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -6$ и вопрос об устойчивости не решается с помощью изложенной теоремы.

3. Исследование на устойчивость с помощью функций Ляпунова. Производной от функции $v(t, x_1, \ldots, x_n)$ в силу системы (1) называется функция

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n,$$

где $f_1, \ldots, f_n$ — правые части системы (1).

Теорема Ляпунова. *Если существует дифференцируемая функция $v(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая в области $|x| < \varepsilon_0$*

условиям

1) $v > 0$ *при* $x \neq 0$, $v(0) = 0$,

2) $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{(1)} \leqslant 0$ *при* $|x| < \varepsilon_0$, $t > t_0$,

то нулевое решение системы (1) *устойчиво по Ляпунову.*

Если вместо условия 2) *выполнено более сильное условие*

3) $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{(1)} \leqslant -w(x) < 0$ *при* $0 < |x| < \varepsilon_0$, $t > t_0$,

а функция $w(x)$ *непрерывна при* $|x| < \varepsilon_0$, *то нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Теорема Четаева. *Пусть система* (1) *обладает нулевым решением. Пусть в некоторой области* V *пространства* $x_1, \ldots, x_n$ *существует дифференцируемая функция* $v(x_1, \ldots, x_n)$, *причем*

1) *точка* $x = 0$ *принадлежит границе области* V,

2) $v = 0$ *на границе области* V *при* $|x| < \varepsilon_0$,

3) *в области* V *при* $t > t_0$ *имеем* $v > 0$, $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{(1)} \geqslant w(x) > 0$, *функция* $w(x)$ *непрерывна.*

Тогда нулевое решение системы (1) *неустойчиво.*

Не существует общего метода построения функции Ляпунова v (когда решение системы (1) неизвестно). В ряде случаев функцию Ляпунова удается построить в виде квадратичной формы $v = \sum\limits_{i,j} b_{ij}x_ix_j$ или в виде суммы квадратичной формы и интегралов от нелинейных функций, входящих в правую часть данной системы.

4. Условия отрицательности всех вещественных частей корней уравнения

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \qquad a_0 > 0, \tag{6}$$

с вещественными коэффициентами.

а) Необходимое условие: *все* $a_i > 0$. В случае $n \leqslant 2$ это условие является и достаточным.

б) Условия Рауса—Гурвица: *необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица*

$$\left\{\begin{matrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{matrix}\right\}.$$

На главной диагонали этой матрицы стоят числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. В каждой строке индекс каждого числа на 1 меньше индекса предыдущего числа. Числа a_i с индексами $i > n$ или $i < 0$ заменяются нулями.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ \ldots \tag{7}$$

в) Условия Льенара—Шипара. *Необходимо и достаточно, чтобы все* $a_i > 0$ *и чтобы* $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$, $\Delta_{n-5} > 0, \ldots$, *где* Δ_i *те же, что в* (7).

Эти условия равносильны условиям Рауса—Гурвица, но удобнее, так как содержат меньше детерминантов.

Пример. При каких a и b корни уравнения $\lambda^4 + 2\lambda^3 + a\lambda^2 + 3\lambda + b = 0$ имеют отрицательные вещественные части?

Пишем условия Льенара—Шипара:

$$a > 0, \quad b > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & 2 \\ 0 & b & 3 \end{vmatrix} = 6a - 4b - 9 > 0, \qquad \Delta_1 = 2 > 0.$$

Отсюда получаем условия $b > 0$, $6a > 4b + 9$.

г) Критерий Михайлова. *Необходимо и достаточно, чтобы на комплексной плоскости точка* $f(i\omega)$, *где* $f(\lambda)$ — *левая часть* (6), *при изменении* ω *от* 0 *до* $+\infty$ *не проходила через начало координат и сделала поворот вокруг него на угол* $n\pi/2$ *в положительном направлении.*

Другая (эквивалентная) формулировка критерия Михайлова: *Необходимо и достаточно, чтобы* $a_na_{n-1} > 0$ *и чтобы корни многочленов*

$$p(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \ldots,$$
$$q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \ldots$$

были все положительными, различными и чередующимися, начиная с корня ξ_1, *т. е.*

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \ldots$$

(Заметим, что многочлен (6) при $\lambda = i\omega$ равен $p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2)$.)

Пример. $f(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + 7\lambda^3 + 8\lambda^2 + 10\lambda + 6$. Здесь $a_n = 6 > 0$, $a_{n-1} = 10 > 0$, а многочлены $p(\xi) = 6 - 8\xi + 2\xi^2$, $q(\eta) = 10 - 7\eta + \eta^2$ имеют корни $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 3$, $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 5$. Значит, $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2$. По критерию Михайлова все корни многочлена $f(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части.

5. Условия устойчивости нулевого решения линейной системы с периодическими коэффициентами см. в [5], гл. III, § 16.

Задачи 881—898 решаются с помощью определения устойчивости.

881. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчивы ли решения данных уравнений с указанными начальными условиями

а) $3(t-1)\dot{x} = x$, $x(2) = 0$. б) $\dot{x} = 4x - t^2x$, $x(0) = 0$.

в) $\dot{x} = t - x$, $x(0) = 1$. г) $2t\dot{x} = x - x^3$, $x(1) = 0$.

В задачах 882—888 начертить на плоскости x, y траектории данных систем вблизи точки $(0, 0)$ и по чертежу выяснить, устойчиво ли нулевое решение.

882. $\dot{x} = -x, \ \dot{y} = -2y.$ **883.** $\dot{x} = x, \ \dot{y} = 2y.$

884. $\dot{x} = -x, \ \dot{y} = y.$ **885.** $\dot{x} = -y, \ \dot{y} = 2x^3.$

886. $\dot{x} = y, \ \dot{y} = -\sin x.$ **887.** $\dot{x} = y, \ \dot{y} = x^3(1+y^2).$

888. $\dot{x} = -y\cos x, \ \dot{y} = \sin x.$

889. Траектории системы уравнений $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$, где функции P, P'_x, P'_y, Q, Q'_x, Q'_y непрерывны, изображены на фазовой плоскости (рис. 5). Что можно сказать о поведении решений при $t \to +\infty$? Является ли нулевое решение асимптотически устойчивым? Является ли оно устойчивым по Ляпунову?

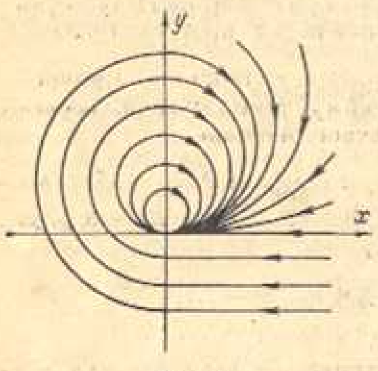


Рис. 5.

В задачах 890—892 выяснить, является ли устойчивым нулевое решение системы, если известно, что общее решение этой системы имеет указанный вид.

890. $x = C_1\cos^2 t - C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2.$

891. $x = \frac{C_1 - C_2 t}{1+t^2}, \quad y = (C_1 t^3 + C_2)\,e^{-t}.$

892. $x = (C_1 - C_2 t)\,e^{-t}, \quad y = \frac{C_1\sqrt[3]{t}}{\ln(t^2+2)} + C_2.$

893. Доказать, что для устойчивости по Ляпунову нулевого решения уравнения $\frac{dx}{dt} = a(t)\,x$ (где функция $a(t)$ непрерывна) необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \int_0^t a(s)\,ds < +\infty.$$

894. Доказать, что если какое-нибудь одно решение линейной системы дифференциальных уравнений

устойчиво по Ляпунову, то устойчивы все решения этой системы.

895. Доказать, что если каждое решение линейной однородной системы остается ограниченным при $t \to +\infty$, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

896. Доказать, что если каждое решение линейной однородной системы стремится к нулю при $t \to +\infty$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.

897. Доказать, что если линейная однородная система имеет хотя бы одно неограниченное при $t \to +\infty$ решение, то нулевое решение неустойчиво.

898. Устойчиво ли нулевое решение системы $\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2$, $\dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2$, если известно, что $a_{11}(t) + a_{22}(t) \to b > 0$ при $t \to +\infty$?

В задачах 899—906 с помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение.

899. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$ **900.** $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$

901. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases}$

902. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}. \end{cases}$

903. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x), \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8+12y}. \end{cases}$

904. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x), \\ \dot{y} = 2^y - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$

905. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(z - y) - 2x, \\ \dot{y} = \sqrt{9+12x} - 3e^y, \\ \dot{z} = -3y. \end{cases}$ **906.** $\begin{cases} \dot{x} = e^x - e^{-3z}, \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x+y), \\ \dot{z} = \ln(1 + z - 3x). \end{cases}$

В задачах 907—912 исследовать, при каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение.

907. $\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$ **908.** $\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$

909. $\begin{cases} \dot{x}=x+ay+y^2, \\ \dot{y}=bx-3y-x^2. \end{cases}$ 910. $\begin{cases} \dot{x}=y+\sin x, \\ \dot{y}=ax+by. \end{cases}$

911. $\begin{cases} \dot{x}=2e^{-x}-\sqrt{4+ay}, \\ \dot{y}=\ln(1+9x+ay). \end{cases}$ 912. $\begin{cases} \dot{x}=\ln(e+ax)-e^y, \\ \dot{y}=bx+\operatorname{tg} y. \end{cases}$

913. Исследовать, устойчиво ли решение $x=-t^2$, $y=t$ системы

$$\dot{x}=y^2-2ty-2y-x, \quad \dot{y}=2x+2t^2+e^{2t-2y}.$$

914. Исследовать, устойчиво ли решение $x=\cos t$, $y=2\sin t$ системы

$$\begin{cases} \dot{x}=\ln\left(x+2\sin^2\frac{t}{2}\right)-\frac{y}{2}, \\ \dot{y}=(4-x^2)\cos t-2x\sin^2 t-\cos^3 t. \end{cases}$$

В задачах **915—922** для данных систем найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

915. $\begin{cases} \dot{x}=y-x^2-x, \\ \dot{y}=3x-x^2-y. \end{cases}$ 916. $\begin{cases} \dot{x}=(x-1)(y-1), \\ \dot{y}=xy-2. \end{cases}$

917. $\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=\sin(x+y). \end{cases}$ 918. $\begin{cases} \dot{x}=\ln(y^2-x), \\ \dot{y}=x-y-1. \end{cases}$

919. $\begin{cases} \dot{x}=3-\sqrt{4+x^2+y}, \\ \dot{y}=\ln(x^2-3). \end{cases}$ 920. $\begin{cases} \dot{x}=e^y-e^x, \\ \dot{y}=\sqrt{3x+y^2}-2. \end{cases}$

921. $\begin{cases} \dot{x}=\ln(1+y+\sin x), \\ \dot{y}=2+\sqrt[3]{3\sin x-8}. \end{cases}$

922. $\begin{cases} \dot{x}=-\sin y, \\ \dot{y}=2x+\sqrt{1-3x-\sin y}. \end{cases}$

В задачах **923—931** исследовать устойчивость нулевого решения, построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова или Четаева.

923. $\begin{cases} \dot{x}=x^3-y, \\ \dot{y}=x+y^3. \end{cases}$ 924. $\begin{cases} \dot{x}=y-x+xy, \\ \dot{y}=x-y-x^2-y^3. \end{cases}$

925. $\begin{cases} \dot{x}=2y^3-x^5, \\ \dot{y}=-x-y^3+y^5. \end{cases}$ 926. $\begin{cases} \dot{x}=xy-x^3+y^3, \\ \dot{y}=x^4-y^3. \end{cases}$

927. $\begin{cases} \dot{x}=y-3x-x^3, \\ \dot{y}=6x-2y. \end{cases}$ 928. $\begin{cases} \dot{x}=2y-x-y^3, \\ \dot{y}=x-2y. \end{cases}$

929. $\begin{cases} \dot{x}=-x-xy, \\ \dot{y}=y^3-x^3. \end{cases}$ 930. $\begin{cases} \dot{x}=x-y-xy^2, \\ \dot{y}=2x-y-y^3. \end{cases}$

931*. $\begin{cases} \dot{x}=-f_1(x)-f_2(y), \\ \dot{y}=f_3(x)-f_4(y), \end{cases}$

где $\operatorname{sgn} f_i(z)=\operatorname{sgn} z$, $i=1, 2, 3, 4$.

В задачах **932—948** исследовать устойчивость нулевого решения, пользуясь известными условиями отрицательности вещественных частей всех корней многочлена, например, условиями Рауса — Гурвица или критерием Михайлова.

932. $y'''+y''+y'+2y=0$.
933. $y'''+2y''+2y'+3y=0$.
934. $y^{IV}+2y'''+4y''+3y'+2y=0$.
935. $y^{IV}+2y'''+3y''+7y'+2y=0$.
936. $y^{IV}+2y'''+6y''+5y'+6y=0$.
937. $y^{IV}+8y'''+14y''+36y'+45y=0$.
938. $y^{IV}+13y'''+16y''+55y'+76y=0$.
939. $y^{IV}+3y'''+26y''+74y'+85y=0$.
940. $y^{IV}+3{,}1y'''+5{,}2y''+9{,}8y'+5{,}8y=0$.
941. $y^{V}+2y^{IV}+4y'''+6y''+5y'+4y=0$.
942. $y^{V}+2y^{IV}+5y'''+6y''+5y'+2y=0$.
943. $y^{V}+3y^{IV}+6y'''+7y''+4y'+4y=0$.
944. $y^{V}+4y^{IV}+9y'''+16y''+19y'+13y=0$.
945. $y^{V}+4y^{IV}+16y'''+25y''+13y'+9y=0$.
946. $y^{V}+3y^{IV}+10y'''+22y''+23y'+12y=0$.
947. $y^{V}+5y^{IV}+15y'''+48y''+44y'+74y=0$.
948. $y^{V}+2y^{IV}+14y'''+36y''+23y'+68y=0$.

В задачах **949—958** исследовать, при каких значениях параметров a и b нулевое решение асимптотически устойчиво.

949. $y'''+ay''+by'+2y=0$.
950. $y'''+3y''+ay'+by=0$.
951. $y^{IV}+2y'''+3y''+2y'+ay=0$.
952. $y^{IV}+ay'''+y''+2y'+y=0$.
953. $ay^{IV}+y'''+y''+y'+by=0$.
954. $y^{IV}+y'''+ay''+y'+by=0$.
955. $y^{IV}+ay'''+4y''+2y'+by=0$.

956. $y^{IV} + 2y''' + ay'' + by' + y = 0.$

957. $y^{IV} + ay''' + 4y'' + by' + y = 0.$

958. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + ay' + by = 0.$

Для исследования устойчивости уравнений с периодическими коэффициентами в задачах **959** и **960** надо найти матрицу монодромии и вычислить мультипликаторы, см. [5], гл. III, § 15, § 16.

959. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \quad p(t) = a^2 \ (0 < t < \pi), \quad p(t) = b^2 \ (\pi < t < 2\pi),$$

$p(t + 2\pi) \equiv p(t)$, при следующих значениях параметров:

а) $a = 0{,}5, \quad b = 0;$ б) $a = 0{,}5 \quad b = 1;$

в) $a = 0{,}5, \quad b = 1{,}5;$ г) $a = 0{,}75, \quad b = 0;$

д) $a = 1, \quad b = 0;$ е) $a = 1, \quad b = 1{,}5.$

960. Исследовать, при каких a и b устойчиво нулевое решение системы с периодическими коэффициентами

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A(t+2) \equiv A(t),$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ при } 0 < t < 1, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ при } 1 < t < 2.$$

§ 16. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

1. Особой точкой системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{1}$$

или уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \tag{2}$$

где функции P и Q непрерывно дифференцируемы, называется такая точка, в которой $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$.

2. Для исследования особой точки системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy \tag{3}$$

или уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \qquad \left(\frac{dx}{dy} = \frac{ax + by}{cx + dy}\right) \tag{4}$$

надо найти корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Если корни вещественные, различные и одного знака, то особая точка — узел (рис. 6а), если разных знаков — седло (рис. 6б),

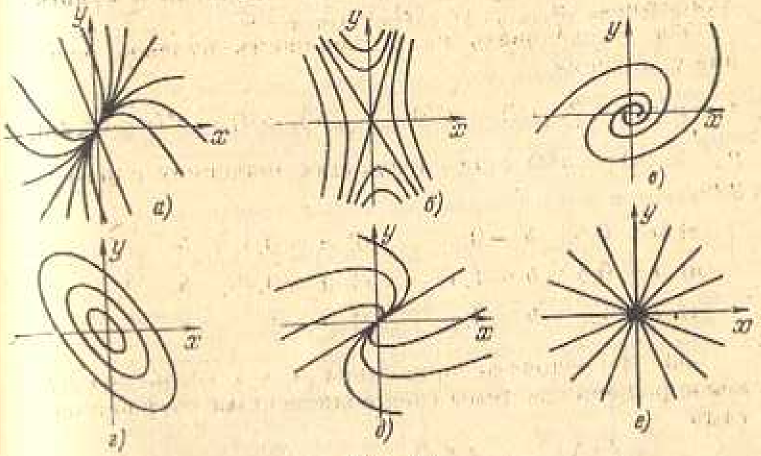


Рис. 6.

если корни комплексные с вещественной частью, отличной от нуля, то особая точка — фокус (рис. 6в), если чисто мнимые, — центр (рис. 6г); если корни равные и ненулевые (т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$), то особая точка может быть вырожденным узлом (рис. 6д) или дикритическим узлом (рис. 6е), причем дикритический узел имеет место только в случае системы $\frac{dx}{dt} = ax$, $\frac{dy}{dt} = ay$ $\left(\text{или уравнения } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\right)$, а во всех остальных случаях при $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ особая точка является вырожденным узлом.

Если же один или оба корня уравнения (5) равны нулю, то $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ и, следовательно, дробь в правой части уравнения (4) сокращается. Уравнение принимает вид $\frac{dy}{dx} = k$, и решения на плоскости (x, y) изображаются параллельными прямыми.

Чтобы начертить интегральные кривые уравнений (4) на плоскости (x, y) (т. е. траектории системы (3)) в случае узла, седла и вырожденного узла, надо прежде всего найти те решения, которые изображаются прямыми, проходящими через особую точку. Эти прямые всегда направлены вдоль собственных векторов матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, составленной из коэффициентов данной системы

(3). В случае узла кривые касаются той прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего м е н ь ш е м у по абсолютной величине значению λ.

В случае особой точки типа фокус надо определить направление закручивания траекторий. Для этого надо, во-первых, исследовать устойчивость этой точки по знаку $\operatorname{Re}\lambda$, и во-вторых, определить, в каком направлении вокруг особой точки происходит движение по траекториям. Для этого достаточно построить в какой-нибудь точке (x, y) вектор скорости $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, определяемый по формулам (3).

Аналогично исследуется направление движения в случае вырожденного узла.

П р и м е р 1. Исследовать особую точку $x=0$, $y=0$ системы

$$\dot{x}=2x, \quad \dot{y}=x+y. \tag{6}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0, \quad (2-\lambda)(1-\lambda)=0, \quad \lambda_1=1, \quad \lambda_2=2.$$

Корни вещественные, различные и одного знака. Следовательно, особая точка — узел (того же типа, что на рис. 6а). Для $\lambda_1=1$ находим собственный вектор $(0, 1)$, а для $\lambda_2=2$ — вектор $(1, 1)$. На плоскости x, y строим прямые, направленные вдоль этих векторов, а затем кривые, касающиеся в начале координат первой из этих прямых, так как $|\lambda_1|<|\lambda_2|$, см. рис. 7.

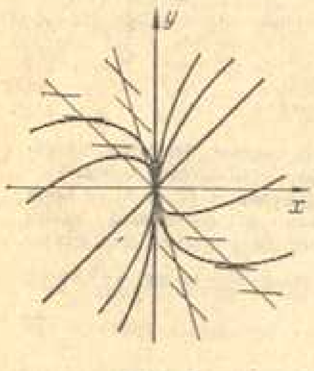


Рис. 7.

Другой способ построения интегральных кривых. Разделив одно из уравнений (6) на другое, получим уравнение вида (4)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{2x}$$

$$\left(\text{или } \frac{dx}{dy}=\frac{2x}{x+y}\right).$$

Прямые, проходящие через особую точку, ищем в виде $y=kx$ (а также $x=0$). Подставляя в написанные уравнения, находим $k=1$. Значит $y=x$ и $x=0$ — искомые прямые. Остальные интегральные кривые строятся с помощью изоклин (рис. 7).

П р и м е р 2. Исследовать особую точку уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x-3y}{x-2y}. \tag{7}$$

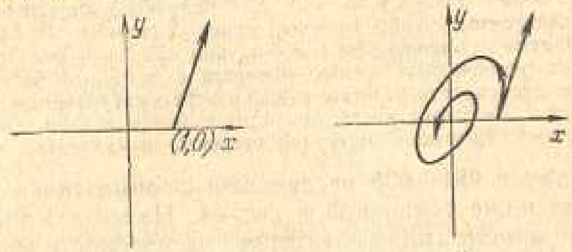
Находим корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0; \quad \lambda^2+2\lambda+5=0; \quad \lambda=-1\pm 2i.$$

Особая точка — фокус. Переходим от уравнения (7) к системе

$$\frac{dx}{dt}=x-2y, \quad \frac{dy}{dt}=4x-3y. \tag{8}$$

Строим в точке $(1, 0)$ вектор скорости $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. В силу (8) он равен $(x-2y, 4x-3y)$. В точке $x=1$, $y=0$ получаем вектор $(1, 4)$ (рис. 8а). Следовательно, возрастанию t соответствует



а) б)

Рис. 8.

движение по траекториям против часовой стрелки. Так как вещественная часть корней λ равна $-1<0$, то особая точка асимптотически устойчива, следовательно, при возрастании t решения неограниченно приближаются к особой точке. Итак, при движении против часовой стрелки траектории приближаются к началу координат (рис. 8б).

3. Для исследования особой точки более общей системы (1) или уравнения (2) надо перенести начало координат в исследуемую особую точку и разложить функции P и Q в окрестности этой точки по формуле Тейлора, ограничиваясь членами первого порядка. Тогда система (1) примет вид

$$\frac{dx_1}{dt}=ax_1+by_1+\varphi(x_1, y_1), \quad \frac{dy_1}{dt}=cx_1+dy_1+\psi(x_1, y_1), \tag{9}$$

где x_1, y_1 — новые координаты (после переноса), a, b, c, d — постоянные. Предположим, что для некоторого $\varepsilon>0$

$$\frac{\varphi(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}}\to 0, \quad \frac{\psi(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}}\to 0 \quad \text{при} \quad x_1\to 0, \quad y_1\to 0,$$

где $r=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$. Очевидно, это условие выполняется (при любом $\varepsilon<1$), если функции P и Q в исследуемой точке дважды дифференцируемы. Предположим еще, что вещественные части всех корней характеристического уравнения (5) отличны от нуля. Тогда особая точка $x_1=0$, $y_1=0$ системы (9) будет того же типа, что особая точка системы (3), получаемой отбрасыванием функций φ и ψ. Далее, угловые коэффициенты направлений, по которым траектории входят в особую точку, для систем (3) и (9) одни и те же (однако прямым $y=kx$ для системы (3) могут соответствовать кривые для системы (9)), а в случае фокуса — направление закручивания одно и то же.

В том случае, когда для системы (3) особая точка — центр, для системы (9) она может быть фокусом или центром. Для наличия центра достаточно (но не необходимо), чтобы траектории системы (9) имели ось симметрии, проходящую через исследуемую точку. Ось симметрии, очевидно, существует, если уравнение вида (2), к которому можно привести систему (9), не меняется от замены x на $-x$ (или y на $-y$). Для наличия фокуса необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение системы (9) было асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$. Исследование на устойчивость можно провести с помощью функции Ляпунова. Это сделать нелегко, так как в рассматриваемом случае функцию Ляпунова часто приходится брать в виде суммы членов второй, третьей и четвертой степеней относительно x, y.

В задачах **961—978** исследовать особые точки написанных ниже уравнений и систем. Начертить интегральные кривые (или траектории) на плоскости (x, y).

961. $y' = \dfrac{2x+y}{3x+4y}$. **962.** $y' = \dfrac{x-4y}{2y-3x}$. **963.** $y' = \dfrac{y-2x}{y}$.

964. $y' = \dfrac{x+4y}{2x+3y}$. **965.** $y' = \dfrac{x-2y}{3x-4y}$. **966.** $y' = \dfrac{2x-y}{x-y}$.

967. $y' = \dfrac{y-2x}{2y-3x}$. **968.** $y' = \dfrac{4y-2x}{x+y}$.

969. $y' = \dfrac{y}{x}$. **970.** $y' = \dfrac{4x-y}{3x-2y}$.

971. $\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$ **972.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

973. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$ **974.** $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

975. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$ **976.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$

977. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4y - 6x. \end{cases}$ **978.** $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = 2y - 4x. \end{cases}$

В задачах **979—992** найти и исследовать особые точки данных уравнений и систем.

979. $y' = \dfrac{2y-x}{3x+6}$. **980.** $y' = \dfrac{2x+y}{x-2y-5}$.

981. $y' = \dfrac{4y^2-x^2}{2xy-4y-8}$. **982.** $y' = \dfrac{2y}{x^2-y^2-1}$.

983. $y' = \dfrac{x^2+y^2-2}{x-y}$. **984.** $y' = \dfrac{y+\sqrt{1+2x^2}}{x+y+1}$.

985. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln(1-x+x^2) - \ln 3. \end{cases}$ **986.** $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2-y^2), \\ \dot{y} = e^x - e^y. \end{cases}$

987. $\begin{cases} \dot{x} = (2x-y)(x-2), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$ **988.** $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2-y+2} - 2, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy). \end{cases}$

989. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = x^2 - (y-2)^2. \end{cases}$ **990.** $\begin{cases} \dot{x} = \ln \dfrac{y^2-y+1}{3}, \\ \dot{y} = x^2 - y^2. \end{cases}$

991. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1-y+y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2+8y}. \end{cases}$ **992.** $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x-y)^2+3} - 2, \\ \dot{y} = e^{y^2-x} - e. \end{cases}$

Для уравнений **993—997** дать чертеж расположения интегральных кривых в окрестности начала координат.

Указание. В задачах 993—997 особые точки не принадлежат к рассмотренным в начале § 16 типам. Для их исследования можно построить несколько изоклин. Затем надо выяснить, с каких сторон интегральные кривые входят в особую точку.

993*. $y' = \dfrac{xy}{x+y}$. **994*.** $y' = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y}$. **995*.** $y' = \dfrac{2xy}{y+x^2}$.

996*. $y' = \dfrac{xy}{y-x^2}$. **997*.** $y' = \dfrac{y^2}{y+x^2}$.

998. Доказать, что если особая точка уравнения

$$(ax + by)\,dx + (mx + ny)\,dy = 0$$

является центром, то это уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Обратное неверно.

999*. Доказать, что если уравнение предыдущей задачи не является уравнением в полных дифференциалах, но имеет интегрирующий множитель, непрерывный в окрестности начала координат, то особая точка — седло (если $an \neq bm$).

1000*. Пусть в уравнении

$$y' = \frac{ax + by + p(x, y)}{cx + dy + q(x, y)} \tag{1}$$

функции p и q определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, а в самой точке $(0, 0)$ $p = p'_x = p'_y = q = q'_x = q'_y = 0$. Доказать, что если уравнение (1) не меняется от замены y на $-y$, а корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

чисто мнимы, то особая точка $(0, 0)$ — центр.

§ 17. ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ

1. О понятиях фазового пространства, фазовой плоскости, автономной системы, траектории см. [1], гл. VII, § 1, п. 4 или [3], § 15 или [4], гл. 3, § 1.

2. Чтобы построить траектории системы

$$\dot{x} = f_1(x, y), \quad \dot{y} = f_2(x, y) \tag{1}$$

на фазовой плоскости x, y, можно или исследовать непосредственно эту систему, или, разделив одно уравнение на другое, свести ее к уравнению первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}. \tag{2}$$

Траектории системы (1) будут интегральными кривыми уравнения (2). Их можно построить или решив уравнение (2) (часто оно решается проще, чем система (1)), или с помощью метода изоклин (§ 1), при этом необходимо исследовать особые точки системы (методами § 16).

Для построения траекторий уравнения $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ на фазовой плоскости надо от этого уравнения перейти к системе $\dot{x} = y$, $\dot{y} = f(x, y)$, которая исследуется так же, как система (1).

3. Предельным циклом называется замкнутая траектория, у которой существует окрестность, целиком заполненная траекториями, неограниченно приближающимися к этой замкнутой траектории при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$. Предельный цикл называется устойчивым, если траектории приближаются к нему только при $t \to +\infty$, неустойчивым — если только при $t \to -\infty$, полуустойчивым — если с одной стороны цикла траектории приближаются к нему при $t \to +\infty$, а с другой стороны при $t \to -\infty$. О предельных циклах см. [3], § 28, [2], § 25.

В задачах **1001—1020** для данных уравнений начертить траектории на фазовой плоскости. По чертежу сделать выводы о поведении решений при $t \to +\infty$.

1001. $\ddot{x} + 4x = 0$. **1002.** $\ddot{x} - x = 0$.

1003. $\ddot{x} - x + x^2 = 0$. **1004.** $\ddot{x} - 3x^2 = 0$.

1005. $\ddot{x} + 2x^3 = 0$. **1006.** $\ddot{x} + 2x^3 - 2x = 0$.

1007. $\ddot{x} + e^x - 1 = 0$. **1008.** $\ddot{x} - 2^x + x + 1 = 0$.

1009. $\ddot{x} - \sin x = 0$. **1010.** $\ddot{x} + 2\cos x - 1 = 0$.

1011. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$. **1012.** $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$.

1013. $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$. **1014.** $\ddot{x} + 2\dot{x} + \dot{x}^2 + x = 0$.

1015. $\ddot{x} + \dot{x} + 2x - x^2 = 0$. **1016.** $\ddot{x} + \dot{x}^2 - x^2 + 1 = 0$.

1017. $\ddot{x} + 2^{\dot{x}} - x^2 = 0$. **1018.** $\ddot{x} + \sqrt{x^2 + \dot{x}^2} - 1 = 0$.

1019. $\ddot{x} + 5\dot{x} - 4\ln\frac{x^2+1}{2} = 0$.

1020. $\ddot{x} + \dot{x} + \operatorname{arctg}(x^2 - 2x) = 0$.

В задачах **1021—1034** начертить на фазовой плоскости траектории данных систем и исследовать особые точки.

1021. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1, \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1. \end{cases}$ **1022.** $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2, \\ \dot{y} = 4y - 8. \end{cases}$

1023. $\begin{cases} \dot{x} = 4 - 4x - 2y, \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$ **1024.** $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

1025. $\begin{cases} \dot{x} = 2 + y - x^2, \\ \dot{y} = 2x(x - y). \end{cases}$ **1026.** $\begin{cases} \dot{x} = xy - 4, \\ \dot{y} = (x-4)(y-x). \end{cases}$

1027. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases}$ **1028.** $\begin{cases} \dot{x} = 2(x-1)(y-2), \\ \dot{y} = y^2 - x^2. \end{cases}$

1029. $\begin{cases} \dot{x} = (x + y)^2 - 1, \\ \dot{y} = -y^2 - x + 1. \end{cases}$ **1030.** $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \\ \dot{y} = 9 - (x - 2y)^2. \end{cases}$

1031. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \\ \dot{y} = (x - 2y)^2 - 9. \end{cases}$

1032. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 6x - 8y, \\ \dot{y} = x(2y - x + 5). \end{cases}$

1033. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = (x - y)(x - y + 2). \end{cases}$

1034. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 5, \\ \dot{y} = (x - 1)(x + 3y - 5). \end{cases}$

1035. Вывести уравнение движения маятника без сопротивления. Для случая, когда все постоянные, входящие в уравнение, равны 1, начертить траектории на фазовой плоскости. Дать физическое истолкование траекториям различных типов.

1036. Вывести уравнение движения маятника с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости. Дать чертеж траекторий на фазовой плоскости.

Указание. Воспользоваться чертежом, построенным для задачи 1035.

1037. Вывести уравнение движения маятника, на который действует постоянная сила, равная половине веса маятника и направленная всегда в одну сторону по касательной к дуге окружности, по которой движется маятник.

Приняв постоянные l и g равными 1, нарисовать траектории полученного уравнения на фазовой плоскости. Какие движения маятника изображаются траекториями различных типов?

1038. Груз массы m прикреплен к пружине. При отклонении груза на расстояние x пружина действует на него с силой kx, направленной к положению равновесия. Сила трения равна $f = \text{const}$ и направлена в сторону, противоположную скорости груза. При $t = 0$ груз находится на расстоянии h от положения равновесия и имеет нулевую скорость.

Вывести уравнение движения груза. Приняв $m = 2$, $k = 2$, $f = 1$, $h = 5$, изобразить движение груза на фазовой плоскости.

1039. Изобразить на фазовой плоскости малые колебания маятника переменной длины, считая, что при движении маятника вверх его длина равна l, а при движении вниз равна $L > l$. Во сколько раз увеличится амплитуда за одно полное колебание? (Пример: раскачка качелей.)

Указание. При малых колебаниях считать $\sin x \approx x$. Изменение длины маятника происходит мгновенно (скачком), при этом угол отклонения маятника и его момент количества движения относительно оси не испытывают скачков.

Начертить на фазовой плоскости траектории систем **1040—1046**, записанных в полярных координатах, и исследовать, имеются ли предельные циклы.

1040. $\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$

1041. $\frac{dr}{dt} = r(r-1)(r-2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$

1042. $\frac{dr}{dt} = r(1-r)^2, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$

1043. $\frac{dr}{dt} = \sin r, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$

1044. $\frac{dr}{dt} = r(|r-1| - |r-2| - 2r + 3), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$

1045. $\frac{dr}{dt} = r \sin \frac{1}{r}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$

1046. $\frac{dr}{dt} = r(1-r) \sin \frac{1}{1-r}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$

1047*. При каких условиях система

$$\frac{dr}{dt} = f(r), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1,$$

где функция $f(r)$ непрерывна, имеет предельный цикл? При каких условиях этот цикл устойчив? Неустойчив? Полуустойчив?

1048*. При каких значениях постоянной a система

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1, \quad \frac{dr}{dt} = (r-1)(a + \sin^2\varphi)$$

имеет устойчивый предельный цикл? Неустойчивый?

Для уравнений **1049—1052** с помощью изоклин построить траектории на фазовой плоскости и исследовать особые точки. По чертежу сделать заключение о поведении решений при $t \to +\infty$ и о возможности существования замкнутых траекторий.

1049. $\ddot{x} + \dot{x}^3 - \dot{x} + x = 0.$ **1050.** $\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$

1051. $\ddot{x} + \dot{x} - 2\operatorname{arctg}\dot{x} + x = 0.$

1052. $\ddot{x} + 2^{\dot{x}} - \dot{x} + x = 0.$

1053*. Для уравнения $\ddot{x} + 2a\dot{x} - b \operatorname{sgn}\dot{x} + x = 0$ $(0 < a < 1,\ b > 0)$ построить траектории на фазовой плоскости и найти точки, в которых предельный цикл пересекает ось Ox.

Указание. Найти зависимость между абсциссами двух последовательных пересечений траектории с осью Ox.

1054. Показать, что уравнение $\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = 0$, где функция F непрерывна и $F(y) > 0$ при $y > 0$, $F(y) < 0$ при $y < 0$, не может иметь предельных циклов на фазовой плоскости.

Указание. Исследовать знак полной производной $\frac{d}{dt}(x^2+y^2)$.

1055*. Пусть $f(x,y)$ и f'_x, f'_y непрерывны, $f(0,0)<0$, а при $x^2+y^2>b^2$ имеем $f(x,y)>0$. Доказать, что уравнение $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+x=0$ имеет периодическое решение $x(t)\not\equiv 0$.

Указание. Перейти на фазовую плоскость и исследовать знак полной производной $\frac{d}{dt}(x^2+y^2)$. Построить кольцо, из которого не может выйти ни одна траектория. Применить теорему 21 из [3].

§ 18. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ОТ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ И ПАРАМЕТРОВ. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассмотрим систему в векторной записи

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \tag{1}$$

где $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $f=(f_1,\ldots,f_n)$. Пусть в рассматриваемой области вектор-функция f непрерывна по t, x и удовлетворяет условию Липшица*) по x

$$\|f(t,y)-f(t,x)\|\leqslant k\|y-x\|. \tag{2}$$

Через $\|\ \|$ обозначается любая из обычно применяемых норм вектора:

$$\|x\|=\sqrt{|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2},$$
$$\|x\|=|x_1|+\ldots+|x_n|$$

или

$$\|x\|=\max_{i=1,\ldots,n}|x_i|.$$

Пусть $x(t)$ — решение системы (1), а $y(t)$ — вектор-функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\left\|\frac{dy}{dt}-f(t,y)\right\|\leqslant\eta,\quad \|y(0)-x(0)\|\leqslant\delta.$$

Тогда имеет место оценка

$$\|x(t)-y(t)\|\leqslant\delta e^{k|t|}+\frac{\eta}{k}\left(e^{k|t|}-1\right). \tag{3}$$

Это неравенство можно применять для грубой оценки ошибки приближенного решения $y(t)$ системы (1), а также для оценки сверху разности решения $x(t)$ системы (1) и решения $y(t)$ системы $\frac{dy}{dt}=g(t,y)$, если $\|g(t,y)-f(t,y)\|\leqslant\eta$.

*) Если в выпуклой по x области имеем $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\leqslant a$ $(i,j=1,\ldots,n)$, то в этой области выполнено условие Липшица с $k=na$.

2. Если в системе уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\ldots,x_n,\mu),\quad i=1,\ldots,n \tag{4}$$

с начальными условиями

$$x_i(0)=a_i(\mu),\quad i=1,\ldots,n \tag{5}$$

μ является параметром, функции f_i и a_i $(i=1,\ldots,n)$ непрерывны и имеют непрерывные производные по $x_1,\ldots,x_n,\mu$, то решение имеет непрерывную производную по параметру μ. Производные $\frac{\partial x_i}{\partial\mu}=u_i$, $i=1,\ldots,n$ удовлетворяют линейной системе уравнений

$$\frac{du_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}u_j+\frac{\partial f_i}{\partial\mu},\quad i=1,\ldots,n, \tag{6}$$

и начальным условиям $u_i(0)=a_i'(\mu)$, $i=1,\ldots,n$. Значения производных $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial f_i}{\partial\mu}$ в формуле (6) берутся при $x_1=x_1(t),\ldots,x_n=x_n(t)$, где $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ — решение системы (4) с начальными условиями (5).

В частности, если положить $a_k(\mu)=\mu$, $a_i(\mu)=\mathrm{const}$ при $i\neq k$ и считать, что все функции $f_1,\ldots,f_n$ не зависят от μ, то из предыдущего утверждения будет следовать, что для системы (4) с начальными условиями $x_i(0)=a_i$, $i=1,\ldots,n$ производные $\frac{\partial x_i}{\partial a_k}=u_i$ $(i=1,\ldots,n)$ от компонент решения $x_1,\ldots,x_n$ по начальному условию a_k существуют и удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{du_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}u_j,\quad i=1,\ldots,n,$$

и начальным условиям $u_i(0)=0$ при $i\neq k$, $u_k(0)=1$.

3. Если в (4) и (5) функции f_i и a_i имеют непрерывные производные по $x_1,\ldots,x_n,\mu$ (вблизи значения $\mu=0$) до порядка m включительно, то решение тоже имеет непрерывные производные по μ до порядка m и, следовательно, разлагается по степеням параметра μ по формуле Тейлора:

$$x(t)=v_0(t)+\mu v_1(t)+\mu^2v_2(t)+\ldots+\mu^m v_m(t)+o(\mu^m). \tag{7}$$

Здесь x и v_i — n-мерные вектор-функции. Чтобы найти функции $v_i(t)$, можно разложить правые части в (4) и (5) по степеням μ, подставить туда разложение (7) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях μ. Получим систему дифференциальных уравнений, из которой последовательно определяются $v_0(t)$, $v_1(t)$, ...

В случае, когда f_i и a_i — аналитические функции от $x_1, \ldots, x_n$, μ, решение $x(t)$ разлагается в сходящийся при малых μ степенной ряд по μ (в силу теоремы об аналитической зависимости решения от параметра, см. [4], гл. 1, § 6). Коэффициенты этого ряда совпадают с коэффициентами разложения (7).

Изложенный метод можно использовать для отыскания решения дифференциального уравнения при малых μ в тех случаях, когда при $\mu = 0$ уравнение решается известными методами.

Пример. Разложить по степеням параметра μ решение задачи

$$\dot{x} = x^2 + 2\mu t^{-1}, \qquad x(1) = -1. \tag{8}$$

Ищем решение в виде $x(t) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \ldots$ Подставляя это в (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем систему

$$\begin{aligned} &\dot{v}_0 = v_0^2, && v_0(1) = -1, \\ &\dot{v}_1 = 2v_0v_1 + 2t^{-1}, && v_1(1) = 0, \\ &\dot{v}_2 = 2v_0v_2 + v_1^2, && v_2(1) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Из первого уравнения и начального условия находим $v_0(t) = -t^{-1}$. Подставляя это во второе уравнение, получаем

$$\dot{v}_1 = -2t^{-1}v_1 + 2t^{-1}, \quad v_1(1) = 0.$$

Отсюда

$$v_1(t) = 1 - t^{-2}.$$

Подставляя найденные v_0 и v_1 в третье уравнение, получаем

$$\dot{v}_2 = -2t^{-1}v_2 + (1 - t^{-2})^2, \quad v_2(1) = 0.$$

Решив это линейное уравнение и воспользовавшись начальным условием, найдем $v_2(t) = \frac{t}{3} - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3}$. Следовательно, решение задачи (8) имеет вид

$$x(t) = -\frac{1}{t} + \mu\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) + \mu^2\left(\frac{t}{3} - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3}\right) + o(\mu^2).$$

Это разложение можно продолжить дальше тем же способом.

Аналогичным методом можно получать разложения по степеням параметра периодических решений нелинейных уравнений, в частности, уравнений вида

$$\ddot{x} + a^2x = \mu f(t, x, \dot{x}, \mu), \tag{9}$$

где функция f периодическая по t. Переходить от уравнения 2-го порядка к системе при этом не нужно. Произвольные постоянные, возникающие при отыскании $v_0(t)$, $v_1(t)$, ..., определяются уже не из начальных условий, а из условий периодичности (см. [4], гл. 2, § 8).

В случае, когда правая часть (9) не зависит от t, период решения $x(t)$ заранее не известен. Тогда в уравнении (9) надо перейти от t к новому независимому переменному $\tau = t(1 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \ldots)$ и искать решения $x(\tau)$ периода $2\pi/a$. Коэффициент b_1 обычно определяется из условия существования периодического решения для $v_1(\tau)$, и т. д. (см. [4], гл. 2, § 8).

4. Если функция $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) аналитическая, т. е. разлагается в ряд по степеням $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$, то решение уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ тоже является аналитической функцией, т. е. разлагается в степенной ряд в окрестности точки x_0 (см. [2], § 18 и [1], гл. II, § 1, п. 6). Аналогичное утверждение справедливо для уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Пример. Найти в виде ряда решение уравнения $y'' = xy^2 - y'$ с начальными условиями $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Ищем решение в виде ряда

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = 2 + x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots, \tag{10}$$

так как из начальных условий следует, что $a_0 = 2$, $a_1 = 1$. Подставляя ряд в дифференциальное уравнение, получим

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \ldots = \\ \ldots = x(2 + x + a_2x^2 + \ldots)^2 - 1 - 2a_2x - 3a_3x^2 - \ldots$$

Представляя правую часть в виде степенного ряда и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения, получим $2a_2 = -1$, $6a_3 = 4 - 2a_2$, $12a_4 = 4 - 3a_3$, ... Отсюда найдем

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{8}, \ldots$$

Следовательно,

$$y = 2 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \ldots$$

5. Для уравнения

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0, \tag{11}$$

у которого все $p_i(x)$ аналитические в окрестности точки x_0 и $p_0(x_0) = 0$, т. е. коэффициент при старшей производной обращается в нуль в точке x_0, решений в виде степенного ряда может не существовать. В этом случае могут существовать решения в виде обобщенных степенных рядов

$$a_0(x - x_0)^r + a_1(x - x_0)^{r+1} + a_2(x - x_0)^{r+2} + \ldots, \tag{12}$$

где число r не обязательно целое (см. [1], гл. VI, § 2, п. 2, или [4], гл. 2, § 7). Чтобы их найти, надо подставить ряд (12) в уравнение (11) и, приравняв коэффициенты при наименьшей степени $(x - x_0)$, найти возможные значения показателя r, а затем для каждого из этих значений r определить коэффициенты a_i.

1056. Оценить, на сколько может измениться при $0 \leqslant x \leqslant 1$ решение уравнения $y' = x + \sin y$ с начальным условием $y(0)=y_0=0$, если число y_0 изменить меньше, чем на 0,01.

1057. Оценить, на сколько может измениться при $0 \leqslant t \leqslant T$ решение уравнения маятника $\ddot{x}+\sin x=0$ с начальными условиями $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$, если в правую часть уравнения добавить такую функцию $\varphi(t)$, что $|\varphi(t)| \leqslant 0{,}1$ (т. е. если приложить некоторую внешнюю силу).

1058. Чтобы приближенно найти решение уравнения $\ddot{x}+\sin x=0$, его заменили уравнением $\ddot{x}+x=0$. Оценить при $0 \leqslant t \leqslant 2$ возникающую от этого ошибку в решении с начальными условиями $x(0)=0{,}25$, $\dot{x}(0)=0$, если известно, что $|x-\sin x| < 0{,}003$ при $|x| \leqslant 0{,}25$.

В задачах **1059—1063** оценить ошибку приближенного решения на указанном отрезке.

1059. $y'=\frac{x}{4}-\frac{1}{1+y^2}$, $y(0)=1$; $\bar{y}=1-\frac{x}{2}$, $|x| \leqslant \frac{1}{2}$.

1060. $\dot{x}=x-y$, $\dot{y}=tx$, $x(0)=1$, $y(0)=0$; $\bar{x}=1+t+\frac{t^2}{2}$, $\bar{y}=\frac{t^2}{2}$, $|t| \leqslant 0{,}1$.

1061. $y''-x^2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$; $\bar{y}=e^{\frac{x^4}{12}}$, $|x| \leqslant 0{,}5$.

1062. $y'=\frac{1}{y}+x$, $y(0)=1$; $\bar{y}=1+x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$.

1063. $y'=2xy^2+1$, $y(0)=1$; $\bar{y}=\frac{1}{1-x}$, $|x| \leqslant \frac{1}{4}$.

Указание. Сначала выделить ограниченную область, в которой содержится приближенное решение $\bar{y}$ и, предположительно, точное решение y. Для этой области оценить постоянную в условии Липшица, затем оценить $|y-\bar{y}|$. С помощью этой оценки проверить, содержится ли y в выделенной области.

В задачах **1064—1073** найти производные по параметру или по начальным условиям от решений данных уравнений и систем.

1064. $y'=y+\mu(x+y^2)$, $y(0)=1$; найти $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1065. $y'=2x+\mu y^2$, $y(0)=\mu-1$; найти $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1066. $y'=y+y^2+xy^3$, $y(2)=y_0$; найти $\left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$.

1067. $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{t}+\mu t e^{-x}$, $x(1)=1$; найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1068. $\frac{dx}{dt}=x^2+\mu t x^3$, $x(0)=1+\mu$; найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1069. $\begin{cases} \dot{x}=4ty^2, \\ \dot{y}=1+5\mu x, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=0$; найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1070. $\begin{cases} \dot{x}=xy+t^2, & x(1)=x_0, \\ 2\dot{y}=-y^2, & y(1)=y_0; \end{cases}$ найти $\left.\frac{\partial x}{\partial y_0}\right|_{\substack{x_0=3 \\ y_0=2}}$.

1071. $\begin{cases} \dot{x}=x+y, & x(0)=1+\mu, \\ \dot{y}=2x+\mu y^2, & y(0)=-2; \end{cases}$ найти $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1072. $\ddot{x}-\dot{x}=(x+1)^2-\mu x^2$; $x(0)=\frac{1}{2}$, $\dot{x}(0)=-1$; найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}$.

1073. $\ddot{x}=\frac{2}{t}-\frac{2}{x}$, $x(1)=1$, $\dot{x}(1)=b$; найти $\left.\frac{\partial x}{\partial b}\right|_{b=1}$.

Указание. При $b=1$ решением служит функция $x=t$.

В задачах **1074—1078** найти 2—3 члена разложения решения по степеням малого параметра μ.

1074. $y'=4\mu x-y^2$, $y(1)=1$.

1075. $y'=\frac{2}{y}-5\mu x$, $y(1)=2$.

1076. $xy'=\mu x^2+\ln y$, $y(1)=1$.

1077. $y'=\frac{6\mu}{x}-y^2$, $y(1)=1+3\mu$.

1078. $y'=e^{y-x}+\mu y$, $y(0)=-\mu$.

Для уравнений **1079—1085** с помощью метода малого параметра (см. [4], гл. 2, § 8) найти приближенно периодические решения с периодом, равным периоду правой части уравнения; μ — малый параметр.

1079. $\ddot{x}+3x=2\sin t+\mu\dot{x}^2$.

1080. $\ddot{x}+5x=\cos 2t+\mu x^2$.

1081. $\ddot{x}+3x+x^3=2\mu\cos t$.

1082. $\ddot{x}+x^2=1+\mu\sin t$.

1083. $\ddot{x}+\sin x=\mu\sin 2t$.

1084*. $\ddot{x} + x = \sin 3t - \sin 2t + \mu x^2$; найти лишь нулевое приближение.

1085*. $\ddot{x} + x = 6\mu \sin t - x^3$.

В задачах 1086—1090 с помощью метода малого параметра (см. [4], гл. 2, § 8, п. 4) приближенно найти периодические решения данных уравнений.

1086. $\ddot{x} + x - x^2 = 0$. 1087. $\ddot{x} + x + x^3 = 0$.

1088. $\ddot{x} + \sin x = 0$. 1089. $\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$.

1090. $\ddot{x} + x = \mu(\dot{x} - \dot{x}^3)$.

В каждой из задач 1091—1097 найти в виде степенного ряда решение, удовлетворяющее данным начальным условиям. Вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно).

1091. $y' = y^2 - x$; $y(0) = 1$. 1092. $y' = x + \frac{1}{y}$; $y(0) = 1$.

1093. $y' = y + xe^y$; $y(0) = 0$.

1094. $y' = 2x + \cos y$; $y(0) = 0$.

1095. $y' = x^2 + y^2$; $y(1) = 1$.

1096. $y'' = xy' - y^2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

1097. $y'' = y'^2 + xy$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$.

1098*. Построив мажорирующее уравнение (см. [2], § 18), оценить снизу радиус сходимости степенного ряда, представляющего решение уравнения $y' = y^2 - x$ с начальным условием $y(0) = 1$.

1099*. Оценить, с какой точностью можно получить при $|x| \leqslant 0,2$ решение уравнения $y' = e^y - x^2y$ с начальным условием $y(0) = 0$, если в степенном ряде, представляющем решение, взять только четыре члена (до a_4x^4 включительно).

В задачах 1100—1109 найти линейно независимые решения каждого из данных уравнений в виде степенных рядов. В тех случаях, когда это легко сделать, сумму полученного ряда выразить с помощью элементарных функций.

1100. $y'' - x^2y = 0$. 1101. $y'' - xy' - 2y = 0$.

1102. $(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$.

1103. $(x^2 + 1)y'' + 5xy' + 3y = 0$.

1104. $(1 - x)y'' - 2y' + y = 0$.

1105. $(x^2 - x + 1)y'' + (4x - 2)y' + 2y = 0$.

1106. $y'' - xy' + xy = 0$. 1107. $y'' + y\sin x = 0$.

1108. $xy'' + y\ln(1 - x) = 0$.

1109. $y''' - xy'' + (x - 2)y' + y = 0$.

В задачах 1110—1116 найти те решения данных уравнений, которые выражаются степенными (или обобщенными степенными) рядами.

1110. $xy'' + 2y' + xy = 0$.

1111. $2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x + 1)y = 0$.

1112. $9x^2y'' - (x^2 - 2)y = 0$.

1113. $x^2y'' - x^2y' + (x - 2)y = 0$.

1114. $x^2y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0$.

1115. $xy'' - xy' - y = 0$. 1116. $xy'' + y' - xy = 0$.

1117. Найти с точностью до $O(x^5)$ при $x \to 0$ решение уравнения $xy'' + y' - xy = 0$, линейно независимое с решением, указанным в ответе задачи 1116.

В задачах 1118—1120 указать, имеют ли данные уравнения решение в виде степенного ряда (или обобщенного степенного ряда).

1118. $x^2y'' + xy' - (x + 2)y = 0$.

1119. $x^2y'' + xy' + (1 - x)y = 0$.

1120. $x^2y'' + (3x - 1)y' + y = 0$.

В задачах 1121—1125 найти в виде тригонометрических рядов (см. [1], гл. VI, § 1, п. 3 или [4], гл. 2, § 7) периодические решения данных уравнений.

1121. $y'' - 3y = f(x)$, $f(x) = |x|$ при $|x| \leqslant \pi$, $f(x + 2\pi) \equiv f(x)$.

1122. $y'' + y' + y = |\sin x|$.

1123. $y''' - y' - y = \frac{2\sin x}{5 - 4\cos x}$.

Указание. Разложение в ряд Фурье правой части уравнения 1123 имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin nx$.

1124. $y'' - \pi^2 y = f(x)$, $f(x) = x(1-x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x+1) \equiv f(x)$.

1125. $y'' + 9y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{k^3}$.

В задачах **1126—1129** с помощью метода ломаных Эйлера (с итерациями или без них, см. [4], гл. 1, § 6, § 7) найти приближенно на указанном отрезке решения данных уравнений с указанными начальными условиями. Вычисления вести с двумя или тремя десятичными знаками после запятой с шагом $h = 0{,}2$ или $h = 0{,}1$.

1126. $y' = y^2 + x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 0{,}3$.

1127. $y' = \frac{1}{y} + x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 1$.

1128. $y' = \frac{x}{y} - y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 1$.

1129. $y' = \frac{x^2}{x+y}$, $1 \leqslant x \leqslant 2$; $y(1) = 0$.

В задачах **1130—1135** с помощью метода Адамса или Штермера (см. [4], гл. 1, § 7) вычислить приближенно решения написанных ниже уравнений на указанном отрезке. Вычисления вести с тремя знаками после запятой. Значения решения в начальных точках вычислить с помощью степенного ряда.

1130. $y' = y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 1$.

1131. $y' = y^2 - x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 0{,}5$.

1132. $y' = \frac{1}{y} - x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 1$.

1133. $y' = x^2 - y^2$, $1 \leqslant x \leqslant 2$; $y(1) = 1$.

1134. $y'' = xy$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

1135. $xy'' + y' + xy = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Задачи **1136—1140** можно решить, сравнивая наклон поля направлений (определяемого уравнением $y' = f(x, y)$) в точках некоторых кривых $y = \varphi_i(x)$ с наклоном этих кривых.

1136*. Оценить сверху и снизу решение уравнения $y' = 2 + \sin x - y^2$, $0 \leqslant x < +\infty$, $y(0) = 1$. (На плоскости x, y построить полосу $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, из которой не может выйти это решение.)

1137*. Оценить сверху и снизу решение уравнения $y' = \frac{1}{y} + 2x$, $0 \leqslant x < +\infty$, $y(0) = 1$.

1138*. Доказать, что решение уравнения $y' = x - y^2$ с начальным условием $y(4) = 2$ удовлетворяет неравенствам $\sqrt{x} - 0{,}07 < y(x) < \sqrt{x}$ при $4 < x < \infty$.

1139*. Доказать, что для решения $y(x)$ уравнения $y' = x - y^2$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$, где $x_0 \geqslant 0$, $y_0 \geqslant 0$, имеем $y(x) - \sqrt{x} \to 0$ при $x \to +\infty$.

1140*. Оценить сверху и снизу то периодическое решение уравнения $y' = 2y^2 - \cos^2 5x$, которое лежит в области $y < 0$.

§ 19. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Систему дифференциальных уравнений можно свести путем исключения неизвестных к одному уравнению (иногда к нескольким уравнениям с одной неизвестной функцией в каждом). Подробнее см. [1], гл. VII, § 1, п. 2, или [4], гл. 3, § 2.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$y' = \frac{z}{x}, \quad z' = \frac{(y-z)^2 + xz}{x^2}. \tag{1}$$

Решение. Исключаем z из данных уравнений. Из первого уравнения имеем $z = xy'$. Подставляя во второе уравнение, получим после упрощений

$$x^2 y'' = (y - xy')^2.$$

Данная система уравнений (1) приведена к одному уравнению второго порядка. Это уравнение может быть решено методами, изложенными в § 10 (путем понижения порядка). После того как из этого уравнения будет найдено y, следует найти z, пользуясь равенством $z = xy'$.

2. При решении системы уравнений путем исключения неизвестных обычно получается уравнение более высокого порядка, поэтому во многих случаях удобнее решать систему путем отыскания интегрируемых комбинаций (см. [1], гл. VII, § 5, п. 2).

Пример 2. Решить систему[1])

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}. \tag{2}$$

[1]) Система (2) записана в симметрической форме. О симметрической форме системы дифференциальных уравнений см. [1], гл. VII, § 5, п. 1, или [4], гл. 3, § 3.

Первые две дроби образуют интегрируемую комбинацию. Сокращая равенство $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$ на $\frac{1}{z}$ и интегрируя, получим первый интеграл [1])

$$\frac{x}{y} = C_1. \tag{3}$$

Чтобы найти вторую интегрируемую комбинацию, воспользуемся следующим свойством равных дробей:

если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = t$, то при любых $k_1, k_2, \ldots, k_n$ имеем

$$\frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n}{k_1b_1 + k_2b_2 + \ldots + k_nb_n} = t.$$

Пользуясь этим свойством, получаем из (2)

$$\frac{y \cdot dx + x \cdot dy}{y \cdot xz + x \cdot yz} = \frac{dz}{-xy}; \quad \frac{d(xy)}{2xyz} = \frac{dz}{-xy}; \quad d(xy) = -2z\,dz.$$

Следовательно,

$$xy + z^2 = C_2. \tag{4}$$

Очевидно, первый интеграл (3) и первый интеграл (4) независимы. Система решена.

Вместо того, чтобы искать вторую интегрируемую комбинацию, можно, воспользовавшись знанием первого интеграла (3), исключить из системы (2) одно из неизвестных, например, x. Из (3) имеем $x = C_1y$. Подставляя во второе из уравнений (2), получим $\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-C_1y^2}$. Отсюда $-C_1y\,dy = z\,dz$; $z^2 = -C_1y^2 + C_2$. Подставляя сюда выражение для C_1 из формулы (3), найдем еще один первый интеграл: $z^2 + xy = C_2$.

В задачах **1141—1160** решить данные системы уравнений.

1141. $y' = \frac{x}{z}$, $z' = -\frac{x}{y}$. **1142.** $y' = \frac{y^2}{z-x}$, $z' = y + 1$.

1143. $y' = \frac{z}{x}$, $z' = \frac{z(y + 2z - 1)}{x(y-1)}$.

1144. $y' = y^2z$, $z' = \frac{z}{x} - yz^2$.

1145. $2zy' = y^2 - z^2 + 1$, $z' = z + y$.

1146. $\frac{dx}{2y - z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. **1147.** $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$.

1148. $\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$.

---

[1]) О первых интегралах см. [1], гл. VII, § 4 или [3], § 23.

1149. $\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$.

1150. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{u} = \frac{dz}{x} = \frac{du}{y}$.

1151. $\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{u-y} = \frac{du}{x-z}$.

1152. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$. **1153.** $\frac{dx}{z^2-y^2} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}$.

1154. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy+z}$. **1155.** $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$.

1156. $\frac{dx}{x+y^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.

1157. $\frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{z(z-y)} = \frac{dz}{y(y-z)}$.

1158. $-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}$.

1159. $\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2 - xz}$.

1160. $\frac{dx}{x(y^2-z^2)} = -\frac{dy}{y(z^2+x^2)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

В задачах **1161—1163** для данных систем дифференциальных уравнений и данных функций φ проверить, являются ли соотношения $\varphi = C$ первыми интегралами этих систем.

1161. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - t}{y}$, $\frac{dy}{dt} = -x$; $\varphi_1 = t^2 + 2xy$; $\varphi_2 = x^2 - ty$.

1162. $\dot{x} = xy$, $\dot{y} = x^2 + y^2$; $\varphi_1 = x \ln y - x^2y$; $\varphi_2 = \frac{y^2}{x^2} - 2\ln x$.

1163. $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{u} = -\frac{du}{z}$; $\varphi = yz - ux$.

1164. Проверить, являются ли независимыми первые интегралы $\frac{x+y}{z+x} = C_1$, $\frac{z-y}{x+y} = C_2$ системы

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

1165*. Доказать, что в области, содержащей особую точку типа узла или фокуса, для системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

не может существовать первого интеграла вида $\varphi(x, y) = C$ с непрерывной функцией φ, $\varphi \not\equiv \text{const}$ в сколь угодно малой окрестности особой точки.

1166. Пусть $\varphi_1(t, x, y) = C_1$, $\varphi_2(t, x, y) = C_2$ — первые интегралы системы $\dfrac{dx}{dt} = f_1(t, x, y)$, $\dfrac{dy}{dt} = f_2(t, x, y)$; функции f_1, f_2 и их первые производные по x, y непрерывны. Пусть в пространстве t, x, y поверхности $\varphi_1(t, x, y) = 1$, $\varphi_2(t, x, y) = 2$ имеют только одну общую линию (т. е. пересекаются или касаются друг друга по этой линии). Доказать, что эта линия является интегральной кривой данной системы.

§ 20. УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Чтобы решить уравнение в частных производных

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = b, \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_n, b$ зависят от $x_1, \ldots, x_n, z$, надо написать систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b} \tag{2}$$

и найти n независимых первых интегралов этой системы

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, z) = C_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, z) = C_n. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Общее решение уравнения (1) в неявном виде записывается так:

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0, \tag{4}$$

где F — произвольная дифференцируемая функция.

В частности, если z входит только в один из первых интегралов (3), например в последний, то общее решение можно написать и так:

$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_n, z) = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \tag{5}$$

где f — произвольная дифференцируемая функция. Разрешив равенство (5) относительно z, получим общее решение уравнения (1) в явном виде.

2. Чтобы найти поверхность $z = z(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$a_1(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z) \tag{6}$$

и проходящую через данную линию

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad z = w(t), \tag{7}$$

надо найти два независимых первых интеграла системы

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{b}. \tag{8}$$

В эти первые интегралы

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2 \tag{9}$$

надо подставить вместо x, y, z их выражения (7) через параметр t. Получатся два уравнения вида

$$\Phi_1(t) = C_1, \quad \Phi_2(t) = C_2. \tag{10}$$

Исключив из них t, получим соотношение $F(C_1, C_2) = 0$. Подставив сюда вместо C_1 и C_2 левые части первых интегралов (9), получим искомое решение.

В том случае, когда в оба уравнения (10) не входит t, тогда линия (7) является интегральной кривой системы (8), т. е. характеристикой уравнения (6), и задача Коши имеет бесконечно много решений (см. [1], гл. VIII, § 3, п. 4).

Пример. Найти общее решение уравнения

$$xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = -xy, \tag{11}$$

а также интегральную поверхность, проходящую через кривую

$$y = x^2, \quad z = x^3. \tag{12}$$

Решение. Составляем систему уравнений

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$$

и находим ее первые интегралы (см. § 19, пример 2).

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad z^2 + xy = C_2. \tag{13}$$

Следовательно, общее решение уравнения (11) можно написать в неявном виде

$$F\left(\frac{x}{y}, z^2 + xy\right) = 0,$$

где F — произвольная функция. Так как z входит только в один из первых интегралов (13), то общее решение можно написать и в явном виде. Мы получим

$$z^2 + xy = f\left(\frac{x}{y}\right); \quad z = \pm\sqrt{f\left(\frac{x}{y}\right) - xy},$$

где f — произвольная функция.

Чтобы найти интегральную поверхность, проходящую через линию (12), запишем эту линию в параметрическом виде, например, взяв x в качестве параметра:

$$x = x, \quad y = x^2, \quad z = x^3.$$

Подставив эти выражения в (13), получим

$$\frac{1}{x} = C_1, \quad x^6 + x^3 = C_2.$$

Исключив x, получим

$$\frac{1}{C_1^6} + \frac{1}{C_1^3} = C_2.$$

Подставив вместо C_1 и C_2 левые части первых интегралов (13), найдем искомое решение

$$\left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^3 + xy.$$

3. О решении системы двух уравнений в частных производных первого порядка и о решении уравнения Пфаффа см. [1], гл. IX, § 1 и § 2, пп. 1, 2, 3.

Для каждого из уравнений **1167—1188** найти общее решение.

1167. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$ **1168.** $(x + 2y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1169. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

1170. $(x - z)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - z)\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

1171. $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$ **1172.** $e^x\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = ye^x.$

1173. $2x\frac{\partial z}{\partial x} + (y - x)\frac{\partial z}{\partial y} - x^2 = 0.$

1174. $xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$

1175. $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y + z.$

1176. $(x^2 + y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0.$

1177. $2y^4\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{z^2 + 1}.$

1178. $x^2z\frac{\partial z}{\partial x} + y^2z\frac{\partial z}{\partial y} = x + y.$

1179. $yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = e^z.$

1180. $(z - y)^2\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy.$

1181. $xy\frac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z)\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$

1182. $y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}.$

1183. $\sin^2 x\frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{tg} z\frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z.$

1184. $(x + z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y + z)\frac{\partial z}{\partial y} = x + y.$

1185. $(xz + y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x + yz)\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z^2.$

1186. $(y + z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z + x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x + y)\frac{\partial u}{\partial z} = u.$

1187. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z + u)\frac{\partial u}{\partial z} = xy.$

1188. $(u - x)\frac{\partial u}{\partial x} + (u - y)\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = x + y.$

Найти решения уравнений **1189—1193**, удовлетворяющие указанным условиям.

1189. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$ $z = 2x$ при $y = 1.$

1190. $\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$ $z = y$ при $x = 0.$

1191. $2\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$ $z = y^2$ при $x = 1.$

1192. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0;$ $u = yz$ при $x = 1.$

1193. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0;$ $u = x^2 + y^2$ при $z = 0.$

В задачах **1194—1210** найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через данную линию.

1194. $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = x;$ $x = 0, \quad z = y^2.$

1195. $x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2;$ $y = 1, \quad z = x^2.$

1196. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy;$ $x = 2, \quad z = y^2 + 1.$

1197. $\operatorname{tg} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z; \quad y = x; \quad z = x^3.$

1198. $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 (x - 3y); \quad x = 1, \quad yz + 1 = 0.$

1199. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2; \quad y = -2, \ z = x - x^2.$

1200. $yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy; \quad x = a, \quad y^2 + z^2 = a^2.$

1201. $z \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz; \quad x + y = 2, \quad yz = 1.$

1202. $z \frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} + x = 0; \quad y = x^2, \quad z = 2x.$

1203. $(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = x - y; \quad z = y = -x.$

1204. $x \frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y) \frac{\partial z}{\partial y} = z; \quad x + y = 2z, \quad xz = 1.$

1205. $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0; \ x - y = 0, \ x - yz = 1.$

1206. $x \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = y; \quad y = 2z, \quad x + 2y = z.$

1207. $(y + 2z^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2x^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad x = z, \quad y = x^2.$

1208. $(x - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - z) \frac{\partial z}{\partial y} = 2z; \ x - y = 2, \ z + 2x = 1.$

1209. $xy^3 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 z^2 \frac{\partial z}{\partial y} = y^3 z; \quad x = -z^3, \quad y = z^2.$

1210*. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy; \quad y = x, \quad z = x^2.$

1211. Найти общее уравнение поверхностей, пересекающих под прямым углом поверхности семейства

$$z^2 = Cxy.$$

1212. Найти поверхность, проходящую через прямую

$$y = x, \quad z = 1$$

и ортогональную к поверхностям

$$x^2 + y^2 + z^2 = Cx.$$

1213. Написать уравнение в частных производных, которому удовлетворяют цилиндрические поверхности

с образующими, параллельными вектору (a, b, c). Найти общее решение этого уравнения.

1214. Пользуясь результатом предыдущей задачи, найти уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными вектору $(1, -1, 1)$, и направляющей

$$x + y + z = 0, \quad x^2 + xy + y^2 = 1.$$

1215. Написать уравнение в частных производных, которому удовлетворяют все конические поверхности с вершиной в данной точке (a, b, c), и решить его.

1216. Найти поверхности, у которых любая касательная плоскость пересекает ось Ox в точке с абсциссой, вдвое меньшей абсциссы точки касания.

В задачах **1217—1219** решить данные системы уравнений

1217. $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2z}{y}. \end{cases}$ 1218. $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y - z, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = xz. \end{cases}$

1219. $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2yz - z^2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = xz. \end{cases}$

В задачах **1220—1223** найти поверхности, удовлетворяющие данным уравнениям Пфаффа.

1220. $(x - y)\, dx + z\, dy - x\, dz = 0.$

1221. $3yz\, dx + 2xz\, dy + xy\, dz = 0.$

1222. $(z + xy)\, dx - (z + y^2)\, dy + y\, dz = 0.$

1223. $(2yz + 3x)\, dx + xz\, dy + xy\, dz = 0.$