ПРЕДИСЛОВИЕ

жит задачи по курсу обыкновенных
х уравнений в соответствии с про-
на механико-математическом фа-
ого государственного университета.
из известных задачников Н. М. Гюн-
нна, Г. Н. Бермана, М. Л. Краснова
, учебников В. В. Степанова, Г. Фи-
о задач составлено заново. Более
мечены звездочкой.
ого параграфа изложены основные
ые для решения задач этого параг-
ылки на соответствующие учебники.
иведены подробные решения типо-

ы условные обозначения учебников:
е п а н о в, Курс дифференциальных

е т р о в с к и й, Лекции по теории
ференциальных уравнений.
н т р я г и н, Обыкновенные диффе-
ения.
л ь с г о л ь ц, Дифференциальные
ционное исчисление.
м и д о в и ч, Лекции по математи-
чивости.

А. Ф. Филиппов

§ 1. ИЗОКЛИНЫ. СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ

1. Решение уравнения $y' = f(x, y)$, проходящее через точку (x, y) должно иметь в этой точке производную y', равную $f(x, y)$, т. е. оно должно касаться прямой, наклоненной под углом $\alpha = \operatorname{arctg} f(x, y)$ к оси Ox. Геометрическое место точек плоскости (x, y), в которых наклон касательных к решениям уравнения $y' = f(x, y)$ один и тот же, называется изоклиной. Следовательно, уравнение изоклины имеет вид $f(x, y) = k$, где k — постоянная.

Чтобы приближенно построить решения уравнения $y' = f(x, y)$, можно начертить достаточное число изоклин, а затем провести решения, т. е. кривые, которые в точках пересечения с изоклинами $f(x, y) = k_1$, $f(x, y) = k_2$, ... имеют касательные с угловыми коэффициентами соответственно k_1, k_2, ... Пример применения этого метода см. [1], гл. I, § 1, п. 3, или [4], гл. I, § 1.

2. Чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые семейства

$$\varphi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{1}$$

надо продифференцировать равенство (1) n раз, считая y функцией от x, а затем из полученных уравнений и уравнения (1) исключить произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_n$.

П р и м е р. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых

$$C_1 x + (y - C_2)^2 = 0. \tag{2}$$

Так как уравнение семейства содержит два параметра, дифференцируем его два раза, считая $y = y(x)$:

$$C_1 + 2(y - C_2)\, y' = 0, \tag{3}$$

$$2y'^2 + 2(y - C_2)\, y'' = 0. \tag{4}$$

Исключаем C_1. Из уравнения (3) имеем $C_1 = -2(y - C_2)y'$; подставляя это в (2), получим

$$-2xy'(y - C_2) + (y - C_2)^2 = 0. \tag{5}$$

Исключаем C_2. Из уравнения (4) имеем $y - C_2 = -y'^2/y''$; подставляя это в (5), получим после упрощений дифференциальное уравнение $y' + 2xy'' = 0$.

3. Линии, пересекающие все кривые данного семейства под одним и тем же углом φ, называются изогональными траекториями. Углы β и α наклона траектории и кривой к оси Ox

связаны соотношением $\beta = \alpha \pm \varphi$. Пусть

$$y' = f(x, y) \tag{6}$$

— дифференциальное уравнение данного семейства кривых, а

$$y' = f_1(x, y) \tag{7}$$

— уравнение семейства изогональных траекторий. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$, $\operatorname{tg} \beta = f_1(x, y)$. Следовательно, если уравнение (6) написано и угол φ известен, то легко найти $\operatorname{tg} \beta$ и затем написать дифференциальное уравнение траекторий (7).

Если уравнение данного семейства кривых написано в виде

$$F(x, y, y') = 0, \tag{8}$$

то при составлении уравнения изогональных траекторий можно обойтись без разрешения уравнения (8) относительно y'. В этом случае в (8) надо заменить y' на $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\beta \mp \varphi)$, где $\operatorname{tg} \beta = y'$ — угловой коэффициент касательной к траектории.

Если же уравнение семейства кривых дано в виде $\varphi(x, y, C) = 0$, то сначала нужно составить дифференциальное уравнение этого семейства и только после этого — дифференциальное уравнение траекторий.

В задачах 1—14 с помощью изоклин начертить (приближенно) решения данных уравнений.

1. $y' = y - x^2$. 2. $2(y + y') = x + 3$.
3. $y' = \frac{x^2+y^2}{2} - 1$. 4. $(y^2 + 1)y' = y - x$.
5. $yy' + x = 0$. 6. $xy' = 2y$.
7. $xy' + y = 0$. 8. $y' + y = (x - y')^3$.
9. $y' = x - e^y$. 10. $y(y' + x) = 1$. 11. $y' = \frac{y-3x}{x+3y}$.
12. $y' = \frac{y}{x+y}$. 13. $x^2 + y^2 y' = 1$. 14. $(x^2 + y^2)y' = 4x$.

15. Написать уравнение геометрического места точек (x, y), являющихся точками максимума или минимума решений уравнения $y' = f(x, y)$. Как отличить точки максимума от точек минимума?

16. Написать уравнение геометрического места точек перегиба графиков решений уравнений а) $y' = y - x^2$; б) $y' = x - e^y$; в) $x^2 + y^2 y' = 1$; г) $y' = f(x, y)$.

В задачах 17—29 составить дифференциальные уравнения данных семейств линий.

17. $y = e^{Cx}$. 18. $y = (x - C)^3$. 19. $y = Cx^3$.
20. $y = \sin(x + C)$. 21. $x^2 + Cy^2 = 2y$.
22. $y^2 + Cx = x^3$. 23. $y = C(x - C)^2$.

24. $Cy = \sin Cx$. 25. $y = ax^2 + be^x$.
26. $(x - a)^2 + by^2 = 1$. 27. $\ln y = ax + by$.
82. $y = ax^3 + bx^2 + cx$. 29. $x = ay^2 + by + c$.

30. Составить дифференциальное уравнение окружностей радиуса 1, центры которых лежат на прямой $y = 2x$.

31. Составить дифференциальное уравнение парабол с осью, параллельной Oy, и касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $y = x$.

32. Составить дифференциальное уравнение окружностей, касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $x = 0$ и расположенных в первой и третьей четвертях.

33. Составить дифференциальное уравнение всех парабол с осью, параллельной Oy, и проходящих через начало координат.

34. Составить дифференциальное уравнение всех окружностей, касающихся оси абсцисс.

В задачах 35—36 найти системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют линии данных семейств.

35. $ax + z = b$, $y^2 + z^2 = b^2$.
36. $x^2 + y^2 = z^2 - 2bz$; $y = ax + b$.

В задачах 37—50 составить дифференциальные уравнения[1]) траекторий, пересекающих линии данного семейства под данным углом φ:

37. $y = Cx^4$, $\varphi = 90°$. 38. $y^2 = x + C$, $\varphi = 90°$.
39. $x^2 = y + Cx$, $\varphi = 90°$. 40. $x^2 + y^2 = a^2$, $\varphi = 45°$.
41. $y = kx$, $\varphi = 60°$. 42. $3x^2 + y^2 = C$, $\varphi = 30°$.
43. $y^2 = 2px$, $\varphi = 60°$. 44. $r = a + \cos\theta$, $\varphi = 90°$.
45. $r = a\cos^2\theta$, $\varphi = 90°$. 46. $r = a \sin\theta$, $\varphi = 45°$.
47. $y = x \ln x + Cx$, $\varphi = \operatorname{arctg} 2$.
48. $x^2 + y^2 = 2ax$, $\varphi = 45°$. 49. $x^2 + C^2 = 2Cy$, $\varphi = 90°$.
50. $y = Cx + C^3$, $\varphi = 90°$.

§ 2. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

1. Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)\, g(y), \tag{1}$$

---

[1]) Уравнения, получаемые в задачах 37—50, могут быть решены методами, излагаемыми в дальнейших параграфах.

а также в виде

$$M(x)\,N(y)\,dx + P(x)\,Q(y)\,dy = 0. \tag{2}$$

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только x, в другую — только y, и затем проинтегрировать обе части.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

Пример. Решить уравнение

$$x^2y^2y' + 1 = y. \tag{3}$$

Приводим уравнение к виду (2):

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1; \quad x^2y^2\,dy = (y-1)\,dx.$$

Делим обе части уравнения на $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}\,dy = \frac{dx}{x^2}.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{y^2}{y-1}\,dy = \int \frac{dx}{x^2}; \quad \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

При делении на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y - 1 = 0$, т. е. $y = 1$. Очевидно, $y = 1$ — решение уравнения (3), а $x = 0$ — нет.

2. Уравнения вида $y' = f(ax + by)$ приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by$ (или $z = ax + by + c$, где c любое).

В задачах **51—65** решить данные уравнения и для каждого из них построить несколько интегральных кривых. Найти также решения, удовлетворяющие начальным условиям (в тех задачах, где указаны начальные условия).

51. $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$. **52.** $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$.

53. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$; $y(0) = 1$.

54. $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$; $y(0) = -1$.

55. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$; $y(2) = 0$. **56.** $xy' + y = y^2$; $y(1) = 0{,}5$.

57. $2x^2yy' + y^2 = 2$. **58.** $y' - xy^2 = 2xy$.

59. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$. **60.** $z' = 10^{x+z}$.

61. $x\frac{dx}{dt} + t = 1$. **62.** $y' = \cos(y - x)$.

63. $y' - y = 2x - 3$. **64.** $(x+2y)y' = 1$; $y(0) = -1$.

65. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

В задачах **66—67** найти решения уравнений, удовлетворяющие указанным условиям при $x \to +\infty$.

66. $x^2y' - \cos 2y = 1$; $y(+\infty) = 9\pi/4$.

67. $3y^2y' + 16x = 2xy^3$; $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$.

68. Найти ортогональные траектории к линиям следующих семейств: а) $y = Cx^2$; б) $y = Ce^x$; в) $Cx^2 + y^2 = 1$.

В задачах **69*** и **70*** переменные разделяются, но получаемые интегралы не могут быть выражены через элементарные функции. Однако, исследовав их сходимость, можно дать ответ на поставленные вопросы.

69*. Показать, что каждая интегральная кривая уравнения $y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}}$ имеет две горизонтальные асимптоты.

70*. Исследовать поведение интегральных кривых уравнения $y' = \sqrt{\frac{\ln(1+y)}{\sin x}}$ в окрестности начала координат. Показать, что из каждой точки границы первого координатного угла выходит одна интегральная кривая, проходящая внутри этого угла.

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ [1]

1. Чтобы решить приведенные ниже геометрические задачи, надо построить чертеж, обозначить искомую кривую через $y = y(x)$ (если задача решается в прямоугольных координатах) и выразить все упоминаемые в задаче величины через x, y и y'. Тогда данное в условии задачи соотношение превращается в дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию $y(x)$.

2. В физических задачах надо прежде всего решить, какую из величин взять за независимое переменное, а какую — за искомую функцию. Затем надо выразить, на сколько изменится искомая функция y, когда независимое переменное x получит приращение Δx, т. е. выразить разность $y(x + \Delta x) - y(x)$ через величины, о которых говорится в задаче. Разделив эту разность на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию. В большинстве задач содержатся условия, с помощью которых можно определить значения постоянных, входящих в общее решение дифференциального уравнения. Иногда дифференциальное

[1] Все задачи этого параграфа сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными. Задачи, приводящиеся к уравнениям других типов, можно найти в соответствующих параграфах. Необходимые для решения задач значения показательной функции и логарифмов можно брать из таблицы в конце задачника.

уравнение можно составить более простым путем, воспользовавшись физическим смыслом призводной (если независимое переменное — время t, то $\frac{dy}{dt}$ есть скорость изменения величины y).

В некоторых задачах при составлении уравнения следует использовать физические законы, сформулированные в тексте перед задачей (или перед группой задач).

Пример. В сосуд, содержащий 10 *л* воды, непрерывно поступает со скоростью 2 *л* в минуту раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 *кг* соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?

Решение. Примем за независимое переменное время t, а за искомую функцию $y(t)$ — количество соли в сосуде через t минут после начала опыта. Найдем, на сколько изменится количество соли за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. В одну минуту поступает 2 *л* раствора, а в Δt минут — $2\Delta t$ литров; в этих $2\Delta t$ литрах содержится $0{,}3 \cdot 2\Delta t = 0{,}6\Delta t$ *кг* соли. С другой стороны, за время Δt из сосуда вытекает $2\Delta t$ литров раствора. В момент t во всем сосуде (10 *л*) содержится $y(t)$ *кг* соли, следовательно, в $2\Delta t$ литрах вытекающего раствора содержалось бы $0{,}2\Delta t \cdot y(t)$ *кг* соли, если бы за время Δt содержание соли в сосуде не менялось. Но так как оно за это время меняется на величину, бесконечно малую при $\Delta t \to 0$, то в вытекающих $2\Delta t$ литрах содержится $0{,}2\Delta t(y(t) + \alpha)$ *кг* соли, где $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Итак, в растворе, втекающем за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$, содержится $0{,}6\Delta t$ *кг* соли, а в вытекающем — $0{,}2\Delta t \cdot (y(t) + \alpha)$ *кг*. Приращение количества соли за это время $y(t + \Delta t) - y(t)$ равно разности найденных величин, т. е.

$$y(t + \Delta t) - y(t) = 0{,}6\Delta t - 0{,}2\Delta t \cdot (y(t) + \alpha).$$

Разделим на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В левой части получится производная $y'(t)$, а в правой получим $0{,}6 - 0{,}2y(t)$, так как $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Итак, имеем дифференциальное уравнение $y'(t) = 0{,}6 - 0{,}2y(t)$. Решая его, получим

$$y(t) = 3 - Ce^{-0{,}2t}. \qquad (1)$$

Так как при $t = 0$ соли в сосуде не было, то $y(0) = 0$. Полагая в (1) $t = 0$, найдем $y(0) = 3 - C$; $0 = 3 - C$; $C = 3$. Подставляя это значение C в (1), получим $y(t) = 3 - 3e^{-0{,}2t}$. При $t = 5$ в сосуде будет

$$y(5) = 3 - 3e^{-0{,}2 \cdot 5} = 3 - 3e^{-1} \approx 1{,}9 \text{ кг соли.}$$

71. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2.

72. Найти кривые, для которых сумма катетов треугольника, построенного как в предыдущей задаче, есть величина постоянная, равная b.

73. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки кривой, равен $2a$.

74. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

75. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении 1 : 2.

76. Найти кривые, касательные к которым в любой точке образуют равные углы с полярным радиусом и полярной осью.

В задачах **77—79** считать, что втекающий газ (или жидкость) вследствие перемешивания распределяется по всему объему вместилища равномерно.

77. Сосуд объемом в 20 *л* содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает 0,1 *л* азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота?

78. В баке находится 100 *л* раствора, содержащего 10 *кг* соли. В бак непрерывно подается вода (5 *л* в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

79. В воздухе комнаты объемом 200 $м^3$ содержится 0,15% углекислого газа (CO_2). Вентиляция подает в минуту 20 $м^3$ воздуха, содержащего 0,04% CO_2. Через какое время количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится втрое?

В задачах **80—82** принять, что скорость остывания (или нагревания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

80. Тело охладилось за 10 *мин* от 100° до 60°. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°. Когда тело остынет до 25°?

81. В сосуд, содержащий 1 *кг* воды при температуре 20°, опущен алюминиевый предмет с массой 0,5 *кг*, удельной теплоемкостью 0,2 и температурой 75°. Через минуту вода нагрелась на 2°. Когда температура воды и предмета будут отличаться одна от другой на 1°? Потерями тепла на нагревание сосуда и прочими пренебречь.

82. Кусок металла с температурой a градусов помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a градусов до b градусов. При разности температур печи и металла в T градусов металл нагревается со скоростью kT градусов в минуту. Найти температуру метала через час.

83. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 *м/сек*, через 4 *сек* скорость ее 1 *м/сек*. Когда скорость уменьшится до 1 *см/сек*? Какой путь может пройти лодка до остановки?

В задачах **84—86** использовать закон радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент.

84. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?

85. Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 *мг*. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

86. В исследованном куске горной породы содержится 100 *мг* урана и 14 *мг* уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за $4{,}5 \cdot 10^9$ лет и что при полном распаде 238 *г* урана образуется 206 *г* уранового свинца. Определить возраст горной породы. Считать, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебречь наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом (так как они распадаются намного быстрее урана).

87. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 *см* поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглотит слой толщиной в 2 *м*?

Для составления дифференциального уравнения в задачах **88—90** за неизвестную функцию удобнее взять скорость. Ускорение силы тяжести считать равным 10 *м/сек*^{2}.

88. Парашютист прыгнул с высоты 1,5 *км*, а раскрыл парашют на высоте 0,5 *км*. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 *м/сек*. Изменением плотности с высотой пренебречь. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости.

89. Футбольный мяч весом 0,4 *кГ* брошен вверх со скоростью 20 *м/сек*. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,48 *Г* при скорости 1 *м/сек*. Вычислить время подъема мяча и наибольшую высоту подъема. Как изменятся эти результаты, если пренебречь сопротивлением воздуха?

90. Вычислить время падения мяча с высоты 16,3 *м* без начальной скорости с учетом сопротивления воздуха (см. задачу 89). Найти скорость в конце падения.

В задачах **91—95** принять, что жидкость из сосуда вытекает со скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2gh}$, где $g = 10$ *м/сек*^{2} — ускорение силы тяжести, h — высота уровня воды над отверстием.

91. За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака с диаметром $2R = 1{,}8$ *м* и высотой $H = 2{,}45$ *м* через отверстие в дне диаметром $2r = 6$ *см*? Ось цилиндра вертикальна.

92. Решить предыдущую задачу в предположении, что ось цилиндра расположена горизонтально, а отверстие находится в самой нижней части цилиндра.

93. Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 минут. За какое время вытечет вся вода?

94. Воронка имеет форму конуса радиуса $R = 6$ *см* и высоты $H = 10$ *см*, обращенного вершиной вниз. За какое время вытечет вся вода из воронки через круглое отверстие диаметра 0,5 *см*, сделанное в вершине конуса?

95. В прямоугольный бак размером 60 *см* $\times$ 75 *см* и высотой 80 *см* поступает 1,8 *л* воды в секунду. В дне имеется отверстие площадью 2,5 *см*^{2}. За какое время наполнится бак? Сравнить результат с временем наполнения такого бака без отверстия в дне.

96. Резиновый шнур длиной в 1 *м* под действием силы f *кГ* удлиняется на kf метров. На сколько удлинится такой же шнур длины l и веса P под действием своего веса, если его подвесить за один конец?

97. Найти атмосферное давление на высоте h, если на поверхности земли давление равно 1 *кГ/см*^{2} и плотность воздуха 0,0012 *г/см*^{3}. Использовать закон Бойля — Мариотта, в силу которого плотность пропорциональна давлению (т. е. пренебречь изменением температуры воздуха с высотой).

98. Для остановки речных судов у пристани с них бросают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Какая сила будет тормозить судно, если канат делает три витка вокруг столба, коэффициент трения каната о столб равен $^1/_3$, и рабочий на пристани тянет за свободный конец каната с силой 10 *кГ*?

99. В закрытом помещении объемом v *м*^{3} находится открытый сосуд с водой. Скорость испарения воды пропорциональна разности между количеством q_1 водяного пара, насыщающего 1 *м*^{3} воздуха при данной температуре, и количеством q водяного пара, имеющемся в 1 *м*^{3} воздуха в рассматриваемый момент (считаем, что температура воздуха и воды, а также величина площади, с которой происходит испарение, остаются неизменными). В начальный момент в сосуде было m_0 грамм воды, а в 1 *м*^{3} воздуха q_0 грамм пара. Сколько воды останется в сосуде через промежуток времени t?

100. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива m, скорость истечения продуктов горения из ракеты равна c, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха (формула Циолковского).

§ 4. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Однородные уравнения могут быть записаны в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, а также в виде $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени[1]). Чтобы решить однородное уравнение, можно сделать замену $y = tx$, после чего получается уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. Решить уравнение $x\,dy = (x + y)dx$.

Это уравнение — однородное. Полагаем $y = tx$. Тогда $dy = t\,dx + x\,dt$. Подставляя в уравнение, получим

$$x(x\,dt + t\,dx) = (x + tx)\,dx; \quad x\,dt = dx.$$

Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными

$$dt = \frac{dx}{x}; \quad t = \ln|x| + C.$$

Возвращаясь к старому переменному y, получим $y = x(\ln|x| + C)$. Кроме того, имеется решение $x = 0$, которое было потеряно при делении на x.

2. Уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$ приводится к однородному с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых $ax + by + c = 0$ и $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Если же эти прямые не пересекаются, то $a_1x + b_1y = k(ax + by)$; следовательно, уравнение имеет вид $y' = F(ax + by)$ и приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by$ (или $z = ax + by + c$), см. § 2, п. 2.

3. Некоторые уравнения можно привести к однородным заменой $y = z^m$. Число m обычно заранее неизвестно. Чтобы его найти, надо в уравнении сделать замену $y = z^m$. Требуя, чтобы уравнение было однородным, найдем число m, если это возможно. Если же этого сделать нельзя, то уравнение не приводится к однородному этим способом.

Пример. Дано уравнение $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$. После замены $y = z^m$ уравнение примет вид $2mx^4z^{2m-1}z' + z^{4m} = 4x^6$. Это уравнение будет однородным в том случае, когда степени всех его членов равны между собой, т. е. $4 + (2m - 1) = 4m = 6$. Эти равенства удовлетворяются одновременно, если $m = {^3/_2}$. Следовательно, уравнение можно привести к однородному заменой $y = z^{3/2}$.

Решить уравнения 101—129.

101. $(x + 2y)\,dx - x\,dy = 0$.

102. $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$.

103. $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0$.

104. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$. **105.** $y^2 + x^2y' = xyy'$.

106. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$. **107.** $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$.

108. $xy' = y - xe^{y/x}$.

109. $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x + y}{x}$.

110. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$. **111.** $(y + \sqrt{xy})\,dx = x\,dy$.

[1]) Функция $M(x, y)$ называется однородной функцией степени n, если для всех $k > 0$ имеем $M(kx, ky) = k^nM(x, y)$.

112. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

113. $(2x - 4y + 6)\,dx + (x + y - 3)\,dy = 0$.

114. $(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0$.

115. $x - y - 1 + (y - x + 2)\,y' = 0$.

116. $(x + 4y)\,y' = 2x + 3y - 5$.

117. $(y + 2)\,dx = (2x + y - 4)\,dy$.

118. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

119. $(y'+1)\ln\frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}$. 120. $y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\frac{y-2x}{x+1}$.

121. $x^3(y' - x) = y^2$. 122. $2x^2y' = y^3 + xy$.

123. $2x\,dy + (x^2y^4 + 1)\,y\,dx = 0$.

124. $y\,dx + x\,(2xy + 1)\,dy = 0$.

125. $2y' + x = 4\sqrt{y}$. 126. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

127. $2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$.

128. $\frac{2}{3}\,xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$.

129. $2y + (x^2y + 1)\,xy' = 0$.

130. Найти траектории, пересекающие кривые данного семейства под углом в 45°, причем этот угол от касательной к кривой до касательной к траектории отсчитывается в отрицательном направлении.

а) $y = x\ln Cx$; б) $(x - 3y)^4 = Cxy^6$.

131. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

132. Найти кривую, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

133. При каких α и β уравнение $y' = ax^\alpha + by^\beta$ приводится к однородному с помощью замены

$$y = z^m?$$

134*. Пусть функция $f(k)$ непрерывна и $y = k_0x$ — решение уравнения $y' = f(y/x)$. Показать, что:

1) если $f'(k_0) < 1$, то ни одно из других решений не касается прямой $y = k_0x$ в начале координат;

2) если $f'(k_0) > 1$, то этой прямой касается бесконечно много решений.

135. Начертить приближенно интегральные кривые следующих уравнений (не решая уравнений):

а) $y' = \frac{y(2y - x)}{x^2}$; б) $y' = \frac{2y^2 - x^2}{xy}$;

в) $y' = \frac{2y^3 - x^2y}{2x^2y - x^3}$; г*) $xy' = y + \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{x}}$.

Указание. Тангенс угла между лучом $y = kx$ и пересекающей его интегральной кривой уравнения $y' = f(y/x)$ равен $(f(k) - k)/(1 + kf(k))$ (почему?). Для приближенного построения интегральных кривых надо исследовать знак этой дроби в зависимости от k.

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Уравнение

$$y' + a(x)\,y = b(x) \tag{1}$$

называется линейным. Чтобы его решить, надо сначала решить уравнение

$$y' + a(x)\,y = 0 \tag{2}$$

(это делается путем разделения переменных, см. § 2) и в общем решении последнего заменить произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$. Затем выражение, полученное для y, подставить в уравнение (1) и найти функцию $C(x)$.

2. Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять местами искомую функцию и независимое переменное. Например, уравнение $y = (2x + y^3)y'$, в котором y является функцией от x, — нелинейное. Запишем его в дифференциалах: $y\,dx - (2x + y^3)\,dy = 0$. Так как в это уравнение x и dx входят линейно, то уравнение будет линейным, если x считать искомой функцией, а y — независимым переменным. Это уравнение может быть записано в виде $\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = y^2$ и решается аналогично уравнению (1).

3. Чтобы решить уравнение Бернулли, т. е. уравнение

$$y' + a(x)\,y = b(x)\,y^n \qquad (n \neq 1),$$

надо обе его части разделить на y^n и сделать замену $1/y^{n-1} = z$. После замены получается линейное уравнение, которое можно решить изложенным выше способом. (Пример см. в [1], гл. I, § 4, п. 2, пример 10.)

4. Уравнение Риккати, т. е. $y' + a(x)\,y + b(x)\,y^2 = c(x)$, в общем случае не решается в квадратурах. Если же известно одно частное решение $y_1(x)$, то заменой $y = y_1(x) + z$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли и таким образом может быть решено в квадратурах.

Иногда частное решение удается подобрать, исходя из вида свободного члена уравнения (члена, не содержащего y). Например, для уравнения $y' + y^2 = x^2 - 2x$ в левой части будут члены, подобные членам правой части, если взять $y = ax + b$. Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при подобных членах, найдем a и b (если частное решение указанного вида существует, что вовсе не всегда бывает). Другой пример: для уравнения $y' + 2y^2 = 6/x^2$ те же рассуждения побуждают нас искать частное решение в виде $y = a/x$. Подставляя $y = a/x$ в уравнение, найдем постоянную a.

Решить уравнения **136—160.**

136. $xy' - 2y = 2x^4$. **137.** $(2x+1)y' = 4x + 2y$.
138. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$. **139.** $(xy + e^x)\,dx - x\,dy = 0$.
140. $x^2y' + xy + 1 = 0$. **141.** $y = x(y' - x\cos x)$.
142. $2x(x^2 + y)\,dx = dy$. **143.** $(xy' - 1)\ln x = 2y$.
144. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$.
145. $(x + y^2)\,dy = y\,dx$. **146.** $(2e^y - x)y' = 1$.
147. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$.
148. $(2x + y)\,dy = y\,dx + 4\ln y\,dy$.
149. $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$. **150.** $(1 - 2xy)y' = y(y-1)$.
151. $y' + 2y = y^2e^x$. **152.** $(x+1)(y' + y^2) = -y$.
153. $y' = y^4\cos x + y \operatorname{tg} x$. **154.** $xy^2y' = x^2 + y^3$.
155. $xy\,dy = (y^2 + x)\,dx$. **156.** $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.
157. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$. **158.** $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$.
159. $y'x^3\sin y = xy' - 2y$. **160.** $(2x^2y\ln y - x)y' = y$.

С помощью замены переменных или дифференцирования привести уравнения **161—166** к линейным и решить их.

161. $x\,dx = (x^2 - 2y + 1)\,dy$. **162.** $(x+1)(yy' - 1) = y^2$.
163. $x(e^y - y') = 2$.
164. $(x^2 - 1)y'\sin y + 2x\cos y = 2x - 2x^3$.
165. $y(x) = \int_0^x y(t)\,dt + x + 1$.
166. $\int_0^x (x - t)\,y(t)\,dt = 2x + \int_0^x y(t)\,dt$.

В задачах **167—171**, найдя путем подбора частное решение, привести данные уравнения Риккати к уравнениям Бернулли и решить их.

167. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$. **168.** $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0$.
169. $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$.
170. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.
171. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$.

172. Найти траектории, ортогональные к линиям семейства $y^2 = Ce^x + x + 1$.

173. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a^2$.

174. Найти кривые, у которых площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная a^2.

175. В баке находится 100 *л* раствора, содержащего 10 *кг* соли. В бак втекает 5 *л* воды в минуту, а смесь с той же скоростью переливается в другой 100-литровый бак, первоначально наполненный чистой водой. Избыток жидкости из него выливается. Когда количество соли во втором баке будет наибольшим? Чему оно равно?

176. За время Δt (где Δt очень мало и выражено в долях года) из каждого грамма радия распадается $0{,}00044\ \Delta t$ грамма и образуется $0{,}00043\ \Delta t$ грамма радона. Из каждого грамма радона за время Δt распадается $70\ \Delta t$ грамма. В начале опыта имелось некоторое количество x_0 чистого радия. Когда количество образовавшегося и еще не распавшегося радона будет наибольшим?

177. Даны два различных решения y_1 и y_2 линейного уравнения первого порядка. Выразить через них общее решение этого уравнения.

178. Найти то решение уравнения

$$y'\sin 2x = 2(y + \cos x),$$

которое остается ограниченным при $x \to \pi/2$.

179*. Пусть в уравнении $xy' + ay = f(x)$ имеем $a = \text{const} > 0$, $f(x) \to b$ при $x \to 0$. Показать, что только одно решение уравнения остается ограниченным при $x \to 0$, и найти предел этого решения при $x \to 0$.

180*. Пусть в уравнении предыдущей задачи $a = \text{const} < 0$, $f(x) \to b$ при $x \to 0$. Показать, что все решения этого уравнения имеют один и тот же конечный предел при $x \to 0$. Найти этот предел.

В задачах **181—183** искомое решение выражается через интеграл с бесконечным пределом.

181*. Показать, что уравнение $\dfrac{dx}{dt} + x = f(t)$, где $|f(t)| \leqslant M$ при $-\infty < t < +\infty$, имеет одно решение, ограниченное при $-\infty < t < +\infty$. Найти это решение. Показать, что найденное решение периодическое, если функция $f(t)$ периодическая.

182*. Показать, что только одно решение уравнения $xy' - (2x^2+1)y = x^2$ стремится к конечному пределу при $x \to +\infty$, и найти этот предел. Выразить это решение через интеграл.

183*. Найти периодическое решение уравнения

$$y' = 2y\cos^2 x - \sin x.$$

184*. Пусть в уравнении $\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t)$, $a(t) \geqslant c > 0$, $f(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Доказать, что каждое решение этого уравнения стремится к нулю при $t \to +\infty$.

185*. Пусть в уравнении предыдущей задачи имеем $a(t) \geqslant c > 0$ и пусть $x_0(t)$ — решение с начальными условиями $x_0(0) = b$. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если изменить функцию $f(t)$ и число b меньше чем на δ (т. е. заменить их на такую функцию $f_1(t)$ и число b_1, что $|f_1(t) - f(t)| < \delta$, $|b_1 - b| < \delta$), то решение $x_0(t)$ изменится при $t \geqslant 0$ меньше чем на ε. Это свойство решения называется устойчивостью по постоянно действующим возмущениям.

§ 6. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

1. Уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$. Это имеет место, если $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$. Чтобы решить уравнение (1), надо найти функцию $F(x, y)$, от которой полный дифференциал $dF(x, y) = F'_x\,dx + F'_y\,dy$ равен левой части уравнения (1). Тогда общее решение уравнения (1) можно написать в виде $F(x, y) = C$, где C — произвольная постоянная.

Пример. Решить уравнение

$$(2x + 3x^2y)\,dx + (x^3 - 3y^2)\,dy = 0. \tag{2}$$

Так как $\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2y) = 3x^2$, $\frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2$, то уравнение (2) является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $F(x, y)$, полный дифференциал которой $dF = F'_x\,dx + F'_y\,dy$ был бы равен левой части уравнения (2), т. е. такую функцию F, что

$$F'_x = 2x + 3x^2y, \quad F'_y = x^3 - 3y^2. \tag{3}$$

Интегрируем по x первое из уравнений (3), считая y постоянным; при этом вместо постоянной интегрирования надо поставить $\varphi(y)$ — неизвестную функцию от y

$$F = \int (2x + 3x^2y)\,dx = x^2 + x^3y + \varphi(y).$$

Подставляя это выражение для F во второе из уравнений (3), найдем $\varphi(y)$:

$$(x^2 + x^3y + \varphi(y))'_y = x^3 - 3y^2; \quad \varphi'(y) = -3y^2; \; \varphi(y) = -y^3 + \text{const}.$$

Следовательно, можно взять $F(x, y) = x^2 + x^3y - y^3$, и общее решение уравнения (2) будет иметь вид

$$x^2 + x^3y - y^3 = C.$$

2. Интегрирующим множителем для уравнения

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{4}$$

называется такая функция $m(x, y) \neq 0$, после умножения на которую уравнение (4) превращается в уравнение в полных дифференциалах. Если функции M и N в уравнении (4) имеют непрерывные частные производные и не обращаются в нуль одновременно, то интегрирующий множитель существует. Однако нет общего метода для его отыскания (когда общее решение уравнения (4) неизвестно).

В некоторых случаях интегрирующий множитель можно найти с помощью приемов, изложенных в [1], гл. II, § 3, п. 3 или в [4], гл. 1, § 5. Для решения некоторых уравнений можно применить метод выделения полных дифференциалов, используя известные формулы:

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy, \quad d(y^2) = 2y\,dy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}, \quad d(\ln y) = \frac{dy}{y} \quad \text{и т. п.}$$

Пример. Решить уравнение

$$y\,dx - (4x^2y + x)\,dy = 0. \tag{5}$$

Сначала выделяем группу членов, представляющую собой полный дифференциал. Так как $y\,dx - x\,dy = -x^2 d(y/x)$, то, деля уравнение (5) на $-x^2$, имеем

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + 4y\,dy = 0, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) + d(2y^2) = 0.$$

Это — уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя непосредственно (приводить к виду (1) не нужно), получаем решение

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = C.$$

Кроме того, при делении на $-x^2$ было потеряно решение $x = 0$.

Замечание. Так как после деления уравнения (5) на $-x^2$, т. е. умножения на $-1/x^2$, получилось уравнение в полных дифференциалах, то интегрирующий множитель для уравнения (5) равен $-1/x^2$.

3. Если в уравнении (4) можно выделить полный дифференциал некоторой функции $\varphi(x, y)$, то иногда уравнение упрощается, если от переменных (x, y) перейти к переменным (x, z) или (y, z), где $z = \varphi(x, y)$.

Примеры. 1) Решить уравнение $y\,dx - (x^3y + x)\,dy = 0$.

Выделив полный дифференциал как в предыдущем примере, получим

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + xy\,dy = 0.$$

Перейдя к переменным $z = y/x$ и y получим уравнение

$$dz + \frac{y^2}{z}\,dy = 0,$$

которое легко решается.

2) Решить уравнение $(xy + y^4)\,dx + (x^2 - xy^3)\,dy = 0$.

Сгруппируем члены так, чтобы выделить полные дифференциалы

$$x\,(y\,dx + x\,dy) + y^3\,(y\,dx - x\,dy) = 0, \quad x\,d\,(xy) + y^5 d\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Разделив на x и сделав замену $xy = u$, $x/y = v$, получим уравнение $du + \frac{u^2}{v^3}\,dv = 0$, которое легко решается.

В задачах 186—194 проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и решить их.

186. $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$.
187. $(2 - 9xy^2)\,x\,dx + (4y^2 - 6x^3)\,y\,dy = 0$.
188. $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$.
189. $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0$.
190. $\frac{3x^2 + y^2}{y^2}\,dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}\,dy = 0$.
191. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$.
192. $(1 + y^2 \sin 2x)\,dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0$.
193. $3x^2(1 + \ln y)\,dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy$.
194. $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1}\,dy = 0$.

Решить уравнения 195—220, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных.

195. $(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0$.
196. $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$.
197. $y\,dy = (x\,dy + y\,dx)\sqrt{1 + y^2}$.
198. $xy^2(xy' + y) = 1$.
199. $y^2\,dx - (xy + x^3)\,dy = 0$.
200. $\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + \frac{dy}{y} = 0$.
201. $(x^2 + 3\ln y)\,y\,dx = x\,dy$.
202. $y^2\,dx + (xy + \operatorname{tg} xy)\,dy = 0$.
203. $y\,(x + y)\,dx + (xy + 1)\,dy = 0$.
204. $y\,(y^2 + 1)\,dx + x\,(y^2 - x + 1)\,dy = 0$.
205. $(x^2 + 2x + y)\,dx = (x - 3x^2y)\,dy$.
206. $y\,dx - x\,dy = 2x^3 \operatorname{tg}\frac{y}{x}\,dx$.
207. $y^2\,dx + (e^x - y)\,dy = 0$.
208. $xy\,dx = (y^3 + x^2y + x^2)\,dy$.
209. $x^2y\,(y\,dx + x\,dy) = 2y\,dx + x\,dy$.
210. $(x^2 - y^2 + y)\,dx + x\,(2y - 1)\,dy = 0$.
211. $(2x^2y^2 + y)\,dx + (x^3y - x)\,dy = 0$.
212. $(2x^2y^3 - 1)\,y\,dx + (4x^2y^3 - 1)\,x\,dy = 0$.
213. $y\,(x + y^2)\,dx + x^2(y - 1)\,dy = 0$.
214. $(x^2 - \sin^2 y)\,dx + x\sin 2y\,dy = 0$.
215. $x(\ln y + 2\ln x - 1)\,dy = 2y\,dx$.
216. $(x^2 + 1)\,(2x\,dx + \cos y\,dy) = 2x\sin y\,dx$.
217. $(2x^3y^2 - y)\,dx + (2x^2y^3 - x)\,dy = 0$.
218. $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)\,y' = 0$.
219. $(x^2 - y)\,dx + x\,(y + 1)\,dy = 0$.
220. $y^2(y\,dx - 2x\,dy) = x^3(x\,dy - 2y\,dx)$.

§ 7. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

1. Теорема существования и единственности решения уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Пусть в замкнутой области $R\,(|x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b)$ функции f и f'_y непрерывны). Тогда на некотором отрезке $x_0 - d \leqslant x \leqslant x_0 + d$ существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.*

При этом можно взять $d = \min\left\{a;\ \frac{b}{m}\right\}$, где a и b указаны выше, а m — любое такое, что $|f| \leqslant m$ в R.

*) Требование непрерывности f'_y можно заменить требованием ее ограниченности или условием Липшица: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant k|y_1 - y_2|$, $k = \text{const}$.

Последовательные приближения, определяемые формулами

$$y(x_0)=y_0, \quad y_k(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s, y_{k-1}(s))\,ds,$$

равномерно сходятся к решению на указанном отрезке.

Замечание. Для существования решения достаточно только непрерывности $f(x, y)$ в области R, но при этом решение может не быть единственным.

2. Система уравнений

$$\begin{cases} y_1'=f_1(x, y_1, \ldots, y_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'=f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad (2)$$

в векторных обозначениях записывается так:

$$y'=f(x, y), \qquad (3)$$

где $y=(y_1, \ldots, y_n)$ и $f=(f_1, \ldots, f_n)$ — векторы. Непрерывность вектор-функции f означает непрерывность всех функций $f_1, \ldots, f_n$, а вместо $\frac{\partial f}{\partial y}$ рассматривается матрица из частных производных $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$, $i, k=1, \ldots, n$.

Теорема существования и единственности решения и все утверждения п. 1 остаются справедливыми и для системы, записанной в виде (3). При этом $|y|$ означает длину вектора y: $|y|=\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}$.

3. Теорема существования и единственности решения для уравнения n-го порядка

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (4)$$

Пусть в области D функция f и ее частные производные первого порядка по $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ непрерывны, и точка $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ лежит внутри D. Тогда при начальных условиях

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

уравнение (4) имеет единственное решение.

Уравнение (4) можно свести к системе вида (2), если ввести новые неизвестные функции по формулам $y=y_1$, $y'=y_2$, $y''=y_3$, ..., $y^{(n-1)}=y_n$. Тогда уравнение (4) сводится к системе

$$y_1'=y_2, \quad y_2'=y_3, \ldots, y_{n-1}'=y_n, \quad y_n'=f(x, y_1, \ldots, y_n),$$

которая является частным случаем системы (2) и к которой применимы все утверждения п. 2.

4. Продолжение решений. Во многих случаях решение уравнения (1) или системы (2) существует не только на отрезке, указанном в п. 1, но и на бо́льшем отрезке.

Если уравнение (1) или система (2) удовлетворяет условиям теоремы существования в замкнутой ограниченной области, то всякое решение можно продолжить до выхода на границу этой области.

Если правая часть уравнения (1) или системы (3) в области $\alpha<x<\beta$, $|y|<\infty$ (α и β могут быть конечными или бесконечными) непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|f(x, y)| \leqslant a(x)|y|+b(x),$$

и функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны, то всякое решение можно продолжить на весь интервал $\alpha<x<\beta$.

221. Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данного уравнения с данными начальными условиями:

а) $y'=x-y^2$, $y(0)=0$.
б) $y'=y^2+3x^2-1$, $y(1)=1$.
в) $y'=y+e^{y-1}$, $y(0)=1$.
г) $y'=1+x\sin y$, $y(\pi)=2\pi$.

222. Построить по два последовательных приближения (не считая исходного) к решениям следующих уравнений и систем:

а) $y'=2x+z$, $z'=y$; $y(1)=1$, $z(1)=0$.
б) $\frac{dx}{dt}=y$, $\frac{dy}{dt}=x^2$; $x(0)=1$, $y(0)=2$.
в) $y''+y'^2-2y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
г) $\frac{d^2x}{dt^2}=3tx$; $x(1)=2$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1}=-1$.

223. Указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями:

а) $y'=x+y^3$, $y(0)=0$. б) $y'=2y^2-x$, $y(1)=1$.
в) $\frac{dx}{dt}=t+e^x$, $x(1)=0$.
г) $\frac{dx}{dt}=y^2$, $\frac{dy}{dt}=x^2$, $x(0)=1$, $y(0)=2$.

224*. Для уравнения $y'=x-y^2$ с начальным условием $y(0)=0$ построить третье приближение к решению и оценить его ошибку при $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$.

Указание. Оценить остаток ряда, сходимость которого доказывается в теореме существования решения, см. [1], гл. II, §1; [2], § 15.

225. Пользуясь каким-либо достаточным условием единственности, выделить области на плоскости x, y, в которых через каждую точку проходит единственное решение уравнения

а) $y' = 2xy + y^3$, б) $y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$,

в) $(x-2)y' = \sqrt{y} - x$, г) $y' = 1 + \operatorname{tg} y$,

д) $(y - x)y' = y \ln x$, е) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

226. При каких неотрицательных a нарушается единственность решений уравнения $y' = |y|^a$ и в каких точках?

227. С помощью необходимого и достаточного условия единственности для уравнений вида $y' = f(y)$ (см. [1], гл. III, § 4, п. 1, мелкий шрифт или [2], § 4) исследовать написанные ниже уравнения. Выделив области, где $f(y)$ сохраняет знак, приближенно изобразить на чертеже решения. Для уравнений д) и е) правые части при $y = 0$ доопределяются по непрерывности.

а) $y' = \sqrt[3]{y^2}$, б) $y' = y\sqrt[3]{y+1}$,

в) $y' = (y-1)\sqrt{y^3}$, г) $y' = \arccos y$,

д) $y' = y \ln y$, е) $y' = y \ln^2 y$.

228. При каких начальных условиях существует единственное решение следующих уравнений и систем?

а) $y'' = \operatorname{tg} y + \sqrt[3]{x}$, б) $(x+1)y'' = y + \sqrt{y}$,

в) $(x - y)y'y''' = \ln xy$, г) $y'' - yy''' = \sqrt[5]{y' - x}$,

д) $\dfrac{dx}{dt} = y^2 + \sqrt[3]{t}$, $\dfrac{dy}{dt} = \sqrt[3]{x}$,

е) $\dfrac{dx}{dt} = y^3 + \ln(t+1)$, $x\dfrac{dy}{dt} = \sqrt[3]{y - t}$.

229. Могут ли графики двух решений данного уравнения на плоскости x, y пересекаться в некоторой точке (x_0, y_0)

а) для уравнения $y' = x + y^2$? б) для уравнения $y'' = x + y^2$?

230. Могут ли графики двух решений данного уравнения на плоскости x, y касаться друг друга в некоторой точке (x_0, y_0)

а) для уравнения $y' = x + y^2$? б) для уравнения $y'' = x + y^2$?

в) для уравнения $y''' = x + y^2$?

231. Сколько существует решений уравнения $y^{(n)} = x + y^2$, удовлетворяющих одновременно двум условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$? Рассмотреть отдельно случаи $n = 1, 2, 3$.

232. Сколько решений уравнения $y^{(n)} = f(x, y)$ (f и f'_y непрерывны на всей плоскости x, y) проходит через точку (x_0, y_0) по заданному направлению, образующему угол α с осью Ox? Рассмотреть случаи $n = 1$, $n = 2$ и $n \geqslant 3$.

233. При каких n уравнение $y^{(n)} = f(x, y)$ (f и f'_y непрерывны) может иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x$, $y_2 = x + x^4$?

234. При каких n уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ с непрерывно дифференцируемой функцией f может иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$?

235*. Пусть $f(x, y)$ непрерывна по x, y и при каждом x не возрастает при возрастании y. Доказать, что если два решения уравнения $y' = f(x, y)$ удовлетворяют одному и тому же начальному условию $y(x_0) = y_0$, то они совпадают при $x \geqslant x_0$.

236. Сколько производных имеют решения следующих уравнений и систем в окрестности начала координат? (Теорему о гладкости решений см. [2], § 19 или [4], § 6, теорема 1.4).

а) $y' = x + y^{7/3}$, б) $y' = x|x| - y^2$,

в) $y'' = |x^3| + y^{5/3}$, г) $y''' = y - x\sqrt[3]{x}$,

д) $\dfrac{dx}{dt} = t + y$, $\dfrac{dy}{dt} = x + t^2|t|$,

е) $\dfrac{dx}{dt} = y^2 + \sqrt[3]{t^4}$, $\dfrac{dy}{dt} = \sqrt[3]{x}$.

237*. При каких a каждое решение продолжается на бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$

а) для уравнения $y' = |y|^a$? б) для уравнения $y' = (y^2 + e^x)^a$?

в) для уравнения $y' = |y|^{a-1} + x\,|\sqrt[3]{y}\,|^{2a}$?

г) для системы $y' = (y^2 + z^2 + 2)^{-a}$, $z' = y(1+z^2)^a$?

238*. Для следующих уравнений доказать, что решение с произвольным начальным условием $y(x_0) = y_0$ существует при $x_0 \leqslant x < +\infty$:

а) $y' = x^3 - y^3$, б) $y' = xy + e^{-y}$.

239*. Пусть на всей плоскости x, y функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны и $f'_y(x, y) \leqslant k(x)$, функция $k(x)$ непрерывна. Доказать, что решение уравнения $y' =$

$= f(x, y)$ с любым начальным условием $y(x_0) = y_0$ существует при $x_0 \leqslant x < +\infty$.

240*. Дана система в векторной записи $y' = f(x, y)$, удовлетворяющая условиям теоремы существования в окрестности каждой точки (x, y). Пусть в области $|y| > b$ при всех x

$$y \cdot f(x, y) \leqslant k(x) |y|^2,$$

где $y \cdot f$ — скалярное произведение, а функция $k(x)$ непрерывна. Доказать, что решение с любым начальным условием $y(x_0) = y_0$ существует при $x_0 \leqslant x < +\infty$.

§ 8. УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

1. Уравнения вида $F(x, y, y') = 0$ можно решать следующими методами.

а) Разрешить уравнение относительно y', т. е. из уравнения $F(x, y, y') = 0$ выразить y' через x и y. Получится одно или несколько уравнений вида $y' = f(x, y)$. Каждое из них надо решить.

б) Метод введения параметра [1]).

Пусть уравнение $F(x, y, y') = 0$ можно разрешить относительно y, т. е. записать в виде $y = f(x, y')$. Введя параметр

$$p = \frac{dy}{dx} = y', \tag{1}$$

получим

$$y = f(x, p). \tag{2}$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей равенства (2) и заменив dy через $p\,dx$ (в силу (1)), получим уравнение вида

$$M(x, p)\,dx + N(x, p)\,dp = 0.$$

Если решение этого уравнения найдено в виде $x = \varphi(p)$, то, воспользовавшись равенством (2), получим решение исходного уравнения в параметрической записи: $x = \varphi(p)$, $y = f(\varphi(p), p)$.

Уравнения вида $x = f(y, y')$ решаются тем же методом.

Пример. Решить уравнение $y = x + y' - \ln y'$. Вводим параметр $p = y'$:

$$y = x + p - \ln p. \tag{3}$$

Берем полный дифференциал от обеих частей равенства и заменяем dy на $p\,dx$ в силу (1): $dy = dx + dp - \frac{dp}{p}$, $p\,dx = dx + dp - \frac{dp}{p}$. Решаем полученное уравнение. Переносим члены с

[1]) Здесь излагается простейший вариант этого метода. Более общий вариант см. [1], гл. III, § 3, п. 1.

dx влево, с dp — вправо:

$$(p-1)\,dx = \frac{p-1}{p}\,dp. \tag{4}$$

а) Если $p \neq 1$, то сокращаем на $p - 1$:

$$dx = \frac{dp}{p}, \quad x = \ln p + C.$$

Подставляя это в (3), получаем решение в параметрической записи:

$$x = \ln p + C, \quad y = p + C. \tag{5}$$

В данном случае можно исключить параметр p и получить решение в явном виде. Для этого из первого из уравнений (5) выражаем p через x, т. е. $p = e^{x-C}$. Подставляя это во второе уравнение, получаем искомое решение:

$$y = e^{x-C} + C. \tag{6}$$

б) Рассмотрим случай, когда в (4) имеем $p = 1$. Подставляя $p = 1$ в (3), получаем еще решение

$$y = x + 1. \tag{7}$$

(Было бы ошибкой в равенстве $p = 1$ заменить p на y' и, проинтегрировав, получить $y = x + C$.)

2. Решение $y = \varphi(x)$ уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется *особым*, если через каждую его точку, кроме этого решения, проходит и другое решение, имеющее в этой точке ту же касательную, что и решение $y = \varphi(x)$, но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности этой точки [1]).

Если функция $F(x, y, y')$ и производные $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$ непрерывны, то любое особое решение уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \tag{8}$$

удовлетворяет также уравнению

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \tag{9}$$

Поэтому, чтобы отыскать особые решения уравнения (3), надо исключить y' из уравнений (8) и (9). Полученное уравнение $\psi(x, y) = 0$ называется уравнением *дискриминантной кривой*. Для каждой ветви дискриминантной кривой надо проверить, является ли эта ветвь решением уравнения (8), и если является, то будет ли это решение особым, т. е. касаются ли его в каждой точке другие решения.

Пример. Найти особое решение уравнения

$$y = x + y' - \ln y'. \tag{10}$$

Дифференцируем обе части равенства по y':

$$0 = 1 - \frac{1}{y'}. \tag{11}$$

[1]) Это определение взято из [1]. Есть и другие определения, не равносильные этому.

Исключаем y' из уравнений (10) и (11). Из (11) имеем $y' = 1$; подставляя это в (10), получаем уравнение дискриминантной кривой

$$y = x + 1. \qquad (12)$$

Проверим, будет ли она особым решением. Для этого сначала проверяем, является ли она решением уравнения (10). Подставляя (12) в (10), получаем тождество $x + 1 \equiv x + 1$. Значит, кривая (12) — решение.

Теперь проверим, является ли это решение особым, т. е. касаются ли его в каждой точке другие решения. В п. 1 было найдено, что другие решения выражаются формулой (6). Пишем условия касания кривых $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \quad y_1'(x_0) = y_2'(x_0). \qquad (13)$$

Для решений (6) и (12) эти условия принимают вид $e^{x_0 - C} + C = x_0 + 1$, $e^{x_0 - C} = 1$. Из второго равенства имеем $C = x_0$; подставляя это в первое равенство, получаем $1 + x_0 = x_0 + 1$. Это равенство справедливо при всех x_0. Значит, при каждом x_0 решение (12) в точке с абсциссой x_0 касается одной из кривых семейства (6), а именно той кривой, для которой $C = x_0$.

Итак, в каждой точке решение (12) касается другого решения (6), не совпадающего с ним. Значит, решение (12) — особое.

Если семейство решений записано в параметрическом виде, как в (5), то выполнение условий касания проверяется аналогично. При этом надо учесть, что $y' = p$.

3. Если семейство кривых $\Phi(x, y, C) = 0$, являющихся решениями уравнения $F(x, y, y') = 0$, имеет огибающую $y = \varphi(x)$, то эта огибающая является особым решением того же уравнения. Если функция Φ имеет непрерывные первые производные, то для отыскания огибающей надо исключить C из уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

и проверить, будет ли полученная кривая огибающей, т. е. касаются ли ее в каждой точке кривые семейства. Эту проверку можно провести изложенным в конце п. 2 методом, используя условия касания (13).

В задачах **241—250** найти все решения данных уравнений; выделить особые решения (если они есть); дать чертеж.

241. $y'^2 - y^2 = 0$. **242.** $8y'^3 = 27y$.
243. $(y'+1)^3 = 27(x+y)^2$. **244.** $y^2(y'^2 + 1) = 1$.
245. $y'^2 - 4y^3 = 0$. **246.** $y'^2 = 4y^3(1 - y)$.
247. $xy'^2 = y$. **248.** $yy'^3 + x = 1$.
249. $y'^3 + y^2 = yy'(y'+1)$. **250.** $4(1-y) = (3y-2)^2 y'^2$.

Уравнения **251—266** разрешить относительно y', после этого общее решение искать обычными мето-

дами (§§ 2, 4, 5, 6). Найти также особые решения, если они есть.

251. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$. **252.** $xy'(xy' + y) = 2y^2$.
253. $xy'^2 - 2yy' + x = 0$. **254.** $xy'^2 = y(2y' - 1)$.
255. $y'^2 + x = 2y$. **256.** $y'^3 + (x+2)e^y = 0$.
257. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$. **258.** $(xy' + 3y)^2 = 7x$.
259. $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$.
260. $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$. **261.** $y'^4 + y^2 = y^4$.
262. $x(y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy'$.
263. $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$.
264. $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$.
265. $y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2$.
266. $y(y - 2xy')^2 = 2y'$.

Уравнения **267—286** решить методом введения параметра.

267. $x = y'^3 + y'$. **268.** $x(y'^2 - 1) = 2y'$.
269. $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$. **270.** $y'(x - \ln y') = 1$.
271. $y = y'^2 + 2y'^3$. **272.** $y = \ln(1 + y'^2)$.
273. $(y'+1)^3 = (y'-y)^2$. **274.** $y = (y' - 1)e^{y'}$.
275. $y'^4 - y'^2 = y^2$. **276.** $y'^2 - y'^3 = y^2$.
277. $y'^4 = 2yy' + y^2$. **278.** $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$.
279. $5y + y'^2 = x(x + y')$. **280.** $x^2y'^2 = xyy' + 1$.
281. $y'^3 + y^2 = xyy'$. **282.** $2xy' - y = y' \ln yy'$.
283. $y' = e^{xy'/y}$. **284.** $y = xy' - x^2y'^3$.
285. $y = 2xy' + y^2y'^3$. **286.** $y(y - 2xy')^3 = y'^2$.

Решить уравнения Лагранжа и Клеро (задачи **287—296**).

287. $y = xy' - y'^2$. **288.** $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.
289. $y = 2xy' - 4y'^3$. **290.** $y = xy' - (2 + y')$.
291. $y'^3 = 3(xy' - y)$. **292.** $y = xy'^2 - 2y'^3$.
293. $xy' - y = \ln y'$. **294.** $xy'(y' + 2) = y$.
295. $2y'^2(y - xy') = 1$. **296.** $2xy' - y = \ln y'$.

297. Найти особое решение дифференциального уравнения, если известно семейство решений этого уравнения:

а) $y = Cx^2 - C^2$, б) $Cy = (x - C)^2$,
в) $y = C(x - C)^2$, г) $xy = Cy - C^2$.

298. Найти кривую, каждая касательная к которой образует с осями координат треугольник площади $2a^2$.

299. Найти кривую, каждая касательная к которой отсекает на осях координат такие отрезки, что сумма величин, обратных квадратам длин этих отрезков, равна 1.

300. Найти кривую, проходящую через начало координат и такую, что отрезок нормали к ней, отсекаемый сторонами первого координатного угла, имеет постоянную длину, равную 2.

§ 9. РАЗНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА [1]

Решить уравнения 301—330 и построить графики их решений.

301. $xy' + x^2 + xy - y = 0$. 302. $2xy' + y^2 = 1$.
303. $(2xy^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$.
304. $(xy' + y)^2 = x^2 y'$. 305. $y - y' = y^2 + xy'$.
306. $(x + 2y^3)\,y' = y$. 307. $y'^3 - y' e^{2x} = 0$.
308. $x^2 y' = y(x + y)$. 309. $(1 - x^2)\,dy + xy\,dx = 0$.
310. $y'^2 + 2(x - 1)\,y' - 2y = 0$.
311. $y + y' \ln^2 y = (x + 2\ln y)\,y'$.
312. $x^2 y' - 2xy = 3y$. 313. $x + yy' = y^2(1 + y'^2)$.
314. $y = (xy' + 2y)^2$. 315. $y' = \dfrac{1}{x - y^2}$.
316. $y'^3 + (3x - 6)\,y' = 3y$. 317. $x - \dfrac{y}{y'} = \dfrac{2}{y}$.
318. $2y'^3 - 3y'^2 + x = y$. 319. $(x + y)^2 y' = 1$.
320. $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0$. 321. $\dfrac{dx}{x} = \left(\dfrac{1}{y} - 2x\right) dy$.
322. $xy' = e^y + 2y'$. 323. $2(x - y^2)\,dy = y\,dx$.
324. $x^2 y'^2 + y^2 = 2x(2 - yy')$.
325. $dy + (xy - xy^3)\,dx = 0$. 326. $2x^2 y' = y^2(2xy' - y)$.
327. $\dfrac{y - xy'}{x + yy'} = 2$. 328. $x(x - 1)\,y' + 2xy = 1$.
329. $xy(xy' - y)^2 + 2y' = 0$. 330. $(1 - x^2)\,y' - 2xy^2 = xy$.

[1]) Все задачи § 9 решаются изложенными ранее методами.

Решить уравнения 331—420.

331. $y' + y = xy^3$.
332. $(xy^4 - x)\,dx + (y + xy)\,dy = 0$.
333. $(\sin x + y)\,dy + (y\cos x - x^2)\,dx = 0$.
334. $3y'^3 - xy' + 1 = 0$. 335. $yy' + y^2 \operatorname{ctg} x = \cos x$.
336. $(e^y + 2xy)\,dx + (e^y + x)\,x\,dy = 0$.
337. $xy'^2 = y - y'$. 338. $x(x + 1)(y' - 1) = y$.
339. $y(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}$. 340. $xy' + y = \ln y'$.
341. $x^2(dy - dx) = (x + y)\,y\,dx$.
342. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$. 343. $(x\cos y + \sin 2y)\,y' = 1$.
344. $y'^2 - yy' + e^x = 0$. 345. $y' = \dfrac{x}{y}\, e^{2x} + y$.
346. $(xy' - y)^3 = y'^3 - 1$. 347. $(4xy - 3)\,y' + y^2 = 1$.
348. $y'\sqrt{x} = \sqrt{y - x} + \sqrt{x}$.
349. $xy' = 2\sqrt{y}\cos x - 2y$. 350. $3y'^4 = y' + y$.
351. $y^2(y - xy') = x^3 y'$. 352. $y' = (4x + y - 3)^2$.
353. $(\cos x - x\sin x)\,y\,dx + (x\cos x - 2y)\,dy = 0$.
354. $x^2 y'^2 - 2xyy' = x^2 + 3y^2$.
355. $\dfrac{xy'}{y} + 2xy\ln x + 1 = 0$. 356. $xy' = x\sqrt{y - x^2} + 2y$.
357. $(1 - x^2 y)\,dx + x^2(y - x)\,dy = 0$.
358. $(2xe^y + y^4)\,y' = ye^y$. 359. $xy'(\ln y - \ln x) = y$.
360. $2y' = x + \ln y'$.
361. $(2x^2 y - 3y^2)\,y' = 6x^2 - 2xy^2 + 1$.
362. $yy' = 4x + 3y - 2$.
363. $y^2 y' + x^2 \sin^3 x = y^3 \operatorname{ctg} x$.
364. $2xy' - y = \sin y'$.
365. $(x^2 y^2 + 1)\,y + (xy - 1)^2 xy' = 0$.
366. $y\sin x + y'\cos x = 1$.
367. $x\,dy - y\,dx = x\sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.
368. $y^2 + x^2 y'^5 = xy(y'^2 + y'^3)$.
369. $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$.
370. $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right) dx + x\cos\dfrac{y}{x}\,dy = 0$.
371. $2\left(x^2 y + \sqrt{1 + x^4 y^2}\right) dx + x^3\,dy = 0$.
372. $(y' - x\sqrt{y})(x^2 - 1) = xy$.
373. $y'^3 + (y'^2 - 2y')\,x = 3y' - y$.
374. $(2x + 3y - 1)\,dx + (4x + 6y - 5)\,dy = 0$.
375. $(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0$.
376. $y = y'\sqrt{1 + y'^2}$. 377. $y^2 = (xyy' + 1)\ln x$.

378. $4y = x^2 + y'^2$.

379. $2x\,dy + y\,dx + xy^2(x\,dy + y\,dx) = 0$.

380. $x\,dx + (x^2 \operatorname{ctg} y - 3\cos y)\,dy = 0$.

381. $x^2y'^2 - 2(xy - 2)y' + y^2 = 0$.

382. $xy' + 1 = e^{x-y}$. 383. $y' = \operatorname{tg}(y - 2x)$.

384. $3x^2 - y = y'\sqrt{x^2+1}$. 385. $yy' + xy = x^3$.

386. $x(x-1)y' + y^3 = xy$. 387. $xy' = 2y + \sqrt{1 + y'^2}$.

388. $(2x + y + 5)y' = 3x + 6$.

389. $y' + \operatorname{tg} y = x \sec y$. 390. $y'^4 = 4y(xy' - 2y)^2$.

391. $y' = \frac{y^2 - x}{2y(x+1)}$. 392. $xy' = x^2e^{-y} + 2$.

393. $y' = 3x + \sqrt{y - x^2}$.

394. $x\,dy - 2y\,dx + xy^2(2x\,dy + y\,dx) = 0$.

395. $(x^3 - 2xy^2)\,dx + 3x^2y\,dy = x\,dy - y\,dx$.

396. $(yy')^3 = 27x(y^2 - 2x^2)$. 397. $y' - 8x\sqrt{y} = \frac{4xy}{x^2-1}$.

398. $[2x - \ln(y+1)]\,dx - \frac{x+y}{y+1}\,dy = 0$.

399. $xy' = (x^2 + \operatorname{tg} y)\cos^2 y$. 400. $x^2(y - xy') = yy'^2$.

401. $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$. 402. $y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1) - x^2}$.

403. $(y - 2xy')^2 = 4yy'^3$.

404. $6x^5y\,dx + (y^4\ln y - 3x^6)\,dy = 0$.

405. $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$. 406. $2xy' + 1 = y + \frac{x^2}{y-1}$.

407. $yy' + x = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)^2$. 408. $y' = \left(\frac{3x + y^3 - 1}{y}\right)^2$.

409. $(x\sqrt{y^2+1} + 1)(y^2 + 1)\,dx = xy\,dy$.

410. $(x^2 + y^2 + 1)yy' + (x^2 + y^2 - 1)x = 0$.

411. $y^2(x-1)\,dx = x(xy + x - 2y)\,dy$.

412. $(xy' - y)^2 = x^2y^2 - x^4$.

413. $xyy' - x^2\sqrt{y^2+1} = (x+1)(y^2+1)$.

414. $(x^2 - 1)y' + y^2 - 2xy + 1 = 0$.

415. $y' \operatorname{tg} y + 4x^3\cos y = 2x$.

416. $(xy' - y)^2 = y'^2 - \frac{2yy'}{x} + 1$.

417. $(x + y)(1 - xy)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0$.

418. $(3xy + x + y)y\,dx + (4xy + x + 2y)x\,dy = 0$.

419. $(x^2 - 1)\,dx + (x^2y^2 + x^3 + x)\,dy = 0$.

420. $x(y'^2 + e^{2y}) = -2y'$.

§ 10. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

1. Если в уравнение не входит искомая функция y, т. е. оно имеет вид $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных, входящих в уравнение, т. е. сделав замену $y^{(k)} = z$.

2. Если в уравнение не входит независимое переменное x, т. е. уравнение имеет вид $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новое независимое переменное y, а за неизвестную функцию $y' = p(y)$.

Пример. Решить уравнение $2yy'' = y'^2 + 1$.

В уравнение не входит x. Полагаем $y' = p(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'p.$$

Подставляя $y' = p$ и $y'' = pp'$ в уравнение, получим $2ypp' = p^2 + 1$. Порядок уравнения понижен. Решив полученное уравнение, найдем $p = \pm\sqrt{Cy - 1}$. Следовательно, $y' = \pm\sqrt{Cy - 1}$. Из этого уравнения получим $4(Cy - 1) = C^2(x + C_2)$.

3. Если уравнение однородно относительно y и его производных, т. е. не меняется при одновременной замене $y, y', y'', \ldots$ на $ky, ky', ky'', \ldots$, то порядок уравнения понижается подстановкой $y' = yz$, где z — новая неизвестная функция.

4. Порядок уравнения понижается, если оно является однородным относительно x и y в обобщенном смысле, т. е. не меняется от замены x на kx, y на $k^m y$ (при этом y' заменяется на $k^{m-1}y'$, y'' — на $k^{m-2}y''$ и т. д.). Чтобы узнать, будет ли уравнение однородным, и найти число m, надо приравнять друг другу показатели степеней, в которых число k будет входить в каждый член уравнения после указанной выше замены. Например, в первый член уравнения $2x^4y'' - 3y^2 = x^4$ после этой замены число k будет входить в степени $4 + (m - 2)$, во второй — в степени $2m$, в третий — в степени 4. Следовательно, m должно удовлетворить уравнениям

$$4 + (m - 2) = 2m = 4.$$

Отсюда $m = 2$. Если же полученные уравнения для m будут несовместными, то дифференциальное уравнение не является однородным в указанном смысле.

После того как число m найдено, надо сделать замену переменных $x = e^t$, $y = ze^{mt}$, где $z = z(t)$ — новая неизвестная функция, а t — новое независимое переменное. Получим уравнение, в которое не входит независимое переменное t. Порядок такого уравнения понижается одним из ранее рассмотренных способов.

5. Порядок уравнения легко понижается, если удается преобразовать уравнение к такому виду, чтобы обе его части являлись полными производными по x от каких-нибудь функций. Например, пусть дано уравнение $yy'' = y'^2$. Деля обе части на yy', получим $\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$; $(\ln y')' = (\ln y)'$; $\ln y' = \ln y + \ln C$; $y' = yC$. Порядок уравнения понижен.

Решить уравнения **421—450**.

421. $x^2y''=y'^2$. **422.** $2xy'y''=y'^2-1$.
423. $y^3y''=1$. **424.** $y'^2+2yy''=0$.
425. $y''=2yy'$. **426.** $yy''+1=y'^2$.
427. $y''(e^x+1)+y'=0$. **428.** $y'''=y''^2$.
429. $yy''=y'^2-y'^3$. **430.** $y'''=2(y''-1)\operatorname{ctg} x$.
431. $2yy''=y^2+y'^2$. **432.** $y''^2+xy''=2y'$.
433. $y''^2+y'=xy''$. **434.** $y''+y'^2=2e^{-y}$.
435. $xy'''=y''-xy''$. **436.** $y''^2=y'^2+1$.
437. $y''=e^y$. **438.** $y''-xy'''+y'''^3=0$.
439. $2y'(y''+2)=xy''^2$. **440.** $y^4-y^3y''=1$.
441. $y'^2=(3y-2y')y''$. **442.** $y''(2y'+x)=1$.
443. $y''^2-2y'y'''+1=0$. **444.** $(1-x^2)y''+xy'=2$.
445. $yy''-2yy'\ln y=y'^2$. **446.** $(y'+2y)y''=y'^2$.
447. $xy''=y'+x\sin\frac{y'}{x}$. **448.** $y'''y'^2=y''^3$.
449. $yy''+y=y'^2$. **450.** $xy''=y'+x(y'^2+x^2)$.

Решить уравнения **451—454**, воспользовавшись формулой, сводящей многократное интегрирование к однократному (см. [1], гл. IV, § 2, п. 1).

451. $xy^{\text{IV}}=1$. **452.** $xy''=\sin x$.
453. $y'''=2xy''$. **454.** $xy^{\text{IV}}+y'''=e^x$.

Решить уравнения **455—462**, преобразовав их к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись полными производными.

455. $yy'''+3y'y''=0$. **456.** $y'y'''=2y''^2$.
457. $yy''=y'(y'+1)$. **458.** $5y'''^2-3y''y^{\text{IV}}=0$.
459. $yy''+y'^2=1$. **460.** $y''=xy'+y+1$.
461. $xy''=2yy'-y'$. **462.** $xy''-y'=x^2yy'$.

В задачах **463—480** понизить порядок данных уравнений, пользуясь их однородностью, и решить эти уравнения.

463. $xyy''-xy'^2=yy'$. **464.** $yy''=y'^2+15y^2\sqrt{x}$.
465. $(x^2+1)(y'^2-yy'')=xyy'$.
466. $xyy''+xy'^2=2yy'$. **467.** $x^2yy''=(y-xy')^2$.
468. $y''+\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{y'^2}{y}$.

469. $y(xy''+y')=xy'^2(1-x)$.
470. $x^2yy''+y'^2=0$. **471.** $x^2(y'^2-2yy'')=y^2$.
472. $xyy''=y'(y+y')$. **473.** $4x^2y^3y''=x^2-y^4$.
474. $x^3y''=(y-xy')(y-xy'-x)$.
475. $\frac{y^2}{x^2}+y'^2=3xy''+\frac{2yy'}{x}$.
476. $y''=\left(2xy-\frac{5}{x}\right)y'+4y^2-\frac{4y}{x^2}$.
477. $x^2(2yy''-y'^2)=1-2xyy'$.
478. $x^2(yy''-y'^2)+xyy'=(2xy'-3y)\sqrt{x^3}$.
479. $x^4(y'^2-2yy'')=4x^3yy'+1$.
480. $yy'+xyy''-xy'^2=x^3$.

В задачах **481—500**, понизив порядок данных уравнений, свести их к уравнениям первого порядка.

481. $y''(3+yy'^2)=y'^4$. **482.** $y''^2-y'y'''=\left(\frac{y'}{x}\right)^2$.
483. $yy'+2x^2y''=xy'^2$. **484.** $y'^2+2xyy''=0$.
485. $2xy^2(xy''+y')+1=0$.
486. $x(y''+y'^2)=y'^2+y'$.
487. $y^2(y'y'''-2y''^2)=y'^4$.
488. $y(2xy''+y')=xy'^2+1$.
489. $y''+2yy'^2=\left(2x+\frac{1}{x}\right)y'$.
490. $y'y'''=y''^2+y'^2y''$. **491.** $yy''=y'^2+2xy^2$.
492. $y''^4=y'^5-yy'^3y''$. **493.** $2yy'''=y'$.
494. $y'''y'^2=1$. **495.** $y^2y'''=y'^3$.
496. $x^2yy''+1=(1-y)xy'$.
497. $yy'y'''+2y'^2y''=3yy''^2$.
498. $(y'y'''-3y''^2)y=y'^5$.
499. $y^2(y'y'''-2y''^2)=yy'^2y''+2y'^4$.
500. $x^2(y^2y'''-y'^3)=2y^2y'-3xyy'^2$.

В задачах **501—505** найти решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

501. $yy''=2xy'^2$; $y(2)=2$, $y'(2)=0{,}5$.
502. $2y'''-3y'^2=0$; $y(0)=-3$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-1$.
503. $x^2y''-3xy'=\frac{6y^2}{x^2}-4y$; $y(1)=1$, $y'(1)=4$.
504. $y'''=3yy'$; $y(0)=-2$, $y'(0)=0$, $y''(0)=4{,}5$.
505. $y''\cos y+y'^2\sin y=y'$; $y(-1)=\frac{\pi}{6}$, $y'(-1)=2$.

506. Найти кривые, у которых в любой точке радиус кривизны вдвое больше отрезка нормали, заключенного между этой точкой кривой и осью абсцисс. Рассмотреть два случая: а) кривая обращена выпуклостью к оси абсцисс; б) вогнутостью к оси абсцисс.

507. Найти кривые, у которых радиус кривизны обратно пропорционален косинусу угла между касательной и осью абсцисс.

508. Определить форму равновесия нерастяжимой нити с закрепленными концами, на которую действует нагрузка так, что на каждую единицу длины горизонтальной проекции нагрузка одинакова (цепи цепного моста). Весом самой нити пренебречь.

509. Найти форму равновесия однородной нерастяжимой нити (с закрепленными концами) под действием ее веса.

510*. Доказать, что уравнение движения маятника $y'' + \sin y = 0$ имеет частное решение $y(x)$, стремящееся к π при $x \to +\infty$.

§ 11. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Чтобы решить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{1}$$

надо составить характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{2}$$

и найти все его корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Общее решение уравнения (1) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $C_i e^{\lambda_i x}$ для каждого простого корня λ_i уравнения (2) и слагаемых вида

$$(C_{m+1} + C_{m+2} x + C_{m+3} x^2 + \ldots + C_{m+k} x^{k-1}) e^{\lambda x} \tag{3}$$

для каждого кратного корня λ уравнения (2), где k — кратность корня. Все C_i — произвольные постоянные. Коэффициенты уравнения (1) и корни λ здесь могут быть вещественными или комплексными.

Если же все коэффициенты уравнения (1) вещественные, то решение можно написать в вещественной форме и в случае комплексных корней λ. Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в формулу общего решения включаются слагаемые

$$C_{m+1} e^{\alpha x} \cos \beta x + C_{m+2} e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если эти корни простые, и слагаемые

$$P_{k-1}(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{k-1}(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если каждый из корней $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$ имеет кратность k. Здесь P_{k-1} и Q_{k-1} — многочлены степени $k-1$, аналогичные многочлену в (3), их коэффициенты — произвольные постоянные.

Пример. Решить уравнение $y^{\mathrm{V}} - 2y^{\mathrm{IV}} - 16y' + 32y = 0$.

Пишем характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 - 16\lambda + 32 = 0.$$

Разлагая левую часть на множители, находим корни:

$$(\lambda - 2)(\lambda^4 - 16) = 0, \quad (\lambda - 2)^2 (\lambda + 2)(\lambda^2 + 4) = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -2, \quad \lambda_4 = 2i, \quad \lambda_5 = -2i.$$

По изложенным выше правилам пишем общее решение

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x$$

(степень многочлена $C_1 + C_2 x$ на 1 меньше кратности корня $\lambda = 2$).

2. Для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и с правой частью, состоящей из сумм и произведений функций $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, $e^{\alpha x}$, $\cos \beta x$, $\sin \beta x$, частное решение можно искать методом неопределенных коэффициентов.

Для уравнений с правой частью $P_m(x) e^{\gamma x}$, где $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, частное решение имеет вид

$$y_1 = x^s Q_m(x) e^{\gamma x}, \tag{4}$$

где $Q_m(x)$ — многочлен той же степени m. Число $s = 0$, если γ — не корень характеристического уравнения (2), а если γ — корень, то s равно кратности этого корня. Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q_m(x)$, надо решение (4) подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Если в правую часть уравнения входят синус и косинус, то их можно выразить через показательную функцию по формулам Эйлера

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \tag{5}$$

и свести задачу к уже рассмотренному случаю.

Если же коэффициенты левой части уравнения вещественны, то можно обойтись без перехода к комплексным функциям (5). Для уравнения с правой частью

$$e^{\alpha x} (P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x) \tag{6}$$

можно искать частное решение в виде

$$y_1 = x^s e^{\alpha x} (R_m(x) \cos \beta x + T_m(x) \sin \beta x), \tag{7}$$

где $s = 0$, если $\alpha + \beta i$ не корень характеристического уравнения, и s равно кратности корня $\alpha + \beta i$ в противном случае, а R_m и

T_m — многочлены степени m, равной наибольшей из степеней многочленов P и Q. Чтобы найти коэффициенты многочленов R_m и T_m надо подставить решение (7) в уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах.

Еще один метод отыскания частного решения уравнения с вещественными коэффициентами и правой частью вида (6) состоит в следующем. Сначала решают уравнение с правой частью $P(x)\,e^{(\alpha+\beta i)x}$. Вещественная часть этого решения будет решением уравнения с правой частью $P(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x$, а мнимая — решением уравнения с правой частью $P(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Если правая часть уравнения равна сумме нескольких функций вида $P(x)\,e^{\gamma x}$ и вида (6), то частное решение отыскивается по следующему правилу.

Частное решение линейного уравнения с правой частью $f_1 + \ldots + f_p$ равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, \ldots, f_p$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью.

Пример. Решить уравнение

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x}\cos 2x. \qquad (8)$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$ имеет корень $\lambda = 3$ кратности 2 и корень $\lambda = 0$ кратности 1. Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = (C_1 + C_2x)\,e^{3x} + C_3$.

Правая часть (8) состоит из двух слагаемых вида (6): для первого $\gamma = \alpha + \beta i = 3$, а для второго $\alpha + \beta i = 3 + 2i$. Так как эти числа различны, то надо искать отдельно частные решения уравнений

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}, \qquad (9)$$

$$y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x}\cos 2x. \qquad (10)$$

Число $\gamma = 3$ является корнем кратности $s = 2$, поэтому частное решение уравнения (9) согласно (4) имеет вид $y_1 = x^2(ax + b)\,e^{3x}$. Подставив $y = y_1$ в (9), найдем $a = 1/18$, $b = -1/18$.

Далее, число $\alpha + \beta i = 3 + 2i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение уравнения (10) согласно (7) имеет вид $y_2 = e^{3x}(c\cos 2x + d\sin 2x)$. Подставив $y = y_2$ в (10), найдем $c = -3/52$, $d = -1/26$.

Общее решение уравнения (8) равно $y = y_0 + y_1 + y_2$, где y_0, y_1, y_2 уже найдены.

3. Линейное неоднородное уравнение

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x) \qquad (11)$$

с любой правой частью $f(x)$ решается методом вариации постоянных. Пусть найдено решение $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ линейного однородного уравнения с той же левой частью. Тогда решение уравнения (11) ищется в виде

$$y = C_1(x)\,y_1 + \ldots + C_n(x)\,y_n.$$

Функции $C_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + \ldots + C_n'y_n &= 0 \\ C_1'y_1' + \ldots + C_n'y_n' &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ C_1'y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} &= 0 \\ a_0\left(C_1'y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)}\right) &= f(x). \end{aligned}$$

4. Уравнение Эйлера

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x) \qquad (12)$$

сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$). Для полученного уравнения с постоянными коэффициентами характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)\ldots(\lambda - n + 1) + \ldots + a_{n-2}\lambda(\lambda - 1) + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

При составлении этого уравнения каждое произведение $x^ky^{(k)}$ в (12) заменяется на произведение k убывающих на 1 чисел: $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)\ldots(\lambda - k + 1)$.

Пример. Решить уравнение

$$x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3. \qquad (13)$$

Сразу пишем характеристическое уравнение и решаем его:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - \lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 2 = 0, \qquad (14)$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2.$$

При таких λ общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид (согласно п. 1)

$$y_0 = (C_1 + C_2t)\,e^t + C_3e^{2t}.$$

Чтобы решить неоднородное уравнение (13), сначала раскроем скобки в (14): $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$. По этому характеристическому уравнению составляем левую часть дифференциального уравнения, а правую часть получаем из правой части (13) заменой $x = e^t$:

$$y_t''' - 4y_t'' + 5y_t' - 2y = e^{3t}.$$

Так как число 3 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $y_1 = ae^{3t}$. Подставляя в уравнение, находим $a = 1/4$.

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = y_0 + y_1 = (C_1 + C_2t)\,e^t + C_3e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t} = (C_1 + C_2\ln x)\,x + C_3x^2 + \frac{1}{4}x^3 \quad (x > 0).$$

При $x < 0$ получается аналогичная формула, но с $\ln|x|$ вместо $\ln x$.

5. Для решения задач **635—640** и 879 можно пользоваться следующими законами теории электрических цепей.

Для каждого узла цепи сумма всех притекающих токов равна сумме вытекающих токов.

Алгебраическая сумма напряжений источников тока, содержащихся в любом замкнутом контуре цепи, равна алгебраической сумме падений напряжений на всех остальных участках этого контура.

Падение напряжения на сопротивлении R равно RI; падение напряжения на самоиндукции L равно $L\frac{dI}{dt}$; падение напряжения на конденсаторе емкости C равно q/C, где $q = q(t)$ заряд конденсатора в момент t; при этом $\frac{dq}{dt} = I$; во всех трех случаях $I = I(t)$ — сила тока, протекающего через рассматриваемый участок цепи в данный момент t. В этих формулах I выражается в амперах, R — в омах, L — в генри, q — в кулонах, C — в фарадах, t — в секундах, напряжение — в вольтах.

П р и м е р. Последовательно включены: источник тока, напряжение которого меняется по закону $E = V\sin\omega t$, сопротивление R и емкость C. Найти силу тока в цепи при установившемся режиме[1].

Р е ш е н и е. Сила тока $I = I(t)$ на любом участке цепи одна и та же (по закону о последовательном соединении). Падение напряжения на сопротивлении равно RI, а на емкости q/C. Следовательно, $RI + \frac{q}{C} = V\sin\omega t$. Дифференцируя и пользуясь тем, что $\frac{dq}{dt} = I$, получим уравнение

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = V\omega\cos\omega t. \qquad (15)$$

Это — линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Для отыскания установившегося режима найдем периодическое решение этого уравнения. Исходя из вида правой части уравнения, ищем решение в виде

$$I = A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t. \qquad (16)$$

Подставляя (16) в (15) и приравнивая коэффициенты при подобных членах, получим систему двух уравнений, из которой можно найти A_1 и B_1. Но в электротехнике важнее знать не коэффициенты A_1 и B_1, а амплитуду изменения силы тока. Поэтому выражение (16) переписывают в виде

$$I = A\sin(\omega t - \varphi). \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (15), переходя к тригонометрическим функциям углов ωt и φ, приравнивая коэффициенты сначала при

[1]) Установившимся режимом называется такой, при котором сила тока постоянна или меняется периодически.

$\sin\omega t$, а затем при $\cos\omega t$, получим

$$RA\omega\sin\varphi + \frac{A}{C}\cos\varphi = 0, \qquad RA\omega\cos\varphi - \frac{A}{C}\sin\varphi = V\omega.$$

Отсюда найдем

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{RC\omega}, \qquad A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}}.$$

Поясним, почему найденное периодическое решение называется установившимся режимом. Общее решение уравнения (15) равно сумме найденного частного решения (17) и общего решения линейного однородного уравнения

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \qquad (18)$$

Так как решение уравнения (18) $I = Ke^{-t/RC}$ (здесь K — произвольная постоянная) стремится к нулю при $t \to +\infty$, то л ю б о е решение уравнения (15) при $t \to +\infty$ неограниченно приближается (и притом весьма быстро) к найденному периодическому решению (17).

Решить уравнения **511—548.**

511. $y'' + y' - 2y = 0$.
512. $y'' + 4y' + 3y = 0$.
513. $y'' - 2y' = 0$.
514. $2y'' - 5y' + 2y = 0$.
515. $y'' - 4y' + 5y = 0$.
516. $y'' + 2y' + 10y = 0$.
517. $y'' + 4y = 0$.
518. $y''' - 8y = 0$.
519. $y^{IV} - y = 0$.
520. $y^{IV} + 4y = 0$.
521. $y^{VI} + 64y = 0$.
522. $y'' - 2y' + y = 0$.
523. $4y'' + 4y' + y = 0$.
524. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.
525. $y^{V} - 10y''' + 9y' = 0$.
526. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.
527. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
528. $y''' - y'' - y' + y = 0$.
529. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.
530. $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$.
531. $y''' - 3y' + 2y = 0$.
532. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$.
533. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.
534. $y'' + y = 4xe^{x}$.
535. $y'' - y = 2e^{x} - x^{2}$.
536. $y'' + y' - 2y = 3xe^{x}$.
537. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.
538. $y'' + y = 4\sin x$.
539. $y'' - 5y' + 4y = 4x^{2}e^{2x}$.
540. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$.
541. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.
542. $y'' + 2y' - 3y = x^{2}e^{x}$.
543. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.
544. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$.
545. $y'' - 2y' + y = 6xe^{x}$.
546. $y'' + y = x\sin x$.
547. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$.
548. $y'' - 5y' = 3x^{2} + \sin 5x$.

В задачах **549—574** для каждого из данных уравнений написать его частное решение с неопределенными коэффициентами (числовых значений коэффициентов не находить).

549. $y'' - 2y' + 2y = e^x + x\cos x$.
550. $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x}\cos x$.
551. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x$.
552. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x}\cos 5x$.
553. $y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x\sin 2x$.
554. $y'' - 2y' + y = 2xe^x + e^x\sin 2x$.
555. $y'' - 8y' + 17y = e^{4x}(x^2 - 3x\sin x)$.
556. $y''' + y' = \sin x + x\cos x$.
557. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x}\sin 2x + 2x^2$.
558. $y'' - 6y' + 8y = 5xe^{2x} + 2e^{4x}\sin x$.
559. $y'' + 2y' + y = x(e^{-x} - \cos x)$.
560. $y''' - y'' - y' + y = 3e^x + 5x\sin x$.
561. $y'' - 6y' + 13y = x^2e^{3x} - 3\cos 2x$.
562. $y'' - 9y = e^{-3x}(x^2 + \sin 3x)$.
563. $y^{IV} + y'' = 7x - 3\cos x$. 564. $y'' + 4y = \cos x \cdot \cos 3x$.
565. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^{2x}$.
566. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin^2 x$.
567. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}\cos^2 x$.
568. $y'' - 2y' + 2y = (x + e^x)\sin x$.
569. $y^{IV} + 5y'' + 4y = \sin x \cdot \cos 2x$.
570. $y'' - 3y' + 2y = 2^x$. 571. $y'' - y = 4\,\mathrm{sh}\,x$.
572. $y'' + 4y' + 3y = \mathrm{ch}\,x$. 573. $y'' + 4y = \mathrm{sh}\,x \cdot \sin 2x$.
574. $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{ch}\,x \cdot \sin x$.

Решить уравнения **575—581** способом вариации постоянных.

575. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$. 576. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$.
577. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$. 578. $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\,x$.
579. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$. 580. $y'' + y = 2\sec^3 x$.
581*. $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$.

Найти решения уравнений **582—588**, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

582. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(2) = 1$, $y'(2) = -2$.
583. $y'' + y = 4e^x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.
584. $y'' - 2y' = 2e^x$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.
585. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.
586. $y''' - y' = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.
587. $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$; $y''(0) = 3$.

588. $y^{IV} + y'' = 2\cos x$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = y'''(0) = 0$.

В задачах **589—600** решить уравнения Эйлера

589. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$. 590. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$.
591. $x^3y''' + xy' - y = 0$. 592. $x^2y''' = 2y'$.
593. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$. 594. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$.
595. $x^3y'' - 2xy = 6\ln x$. 596. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.
597. $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$. 598. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$.
599. $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$.
600. $(2x+3)^3y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0$.

Применяя различные методы, решить уравнения:

601. $y'' + 2y' + y = \cos ix$. 602. $y'' - 2y' + y = xe^x\sin^2 ix$.
603. $y'' + 2iy = 8e^x\sin x$. 604. $y'' + 2iy' - y = 8\cos x$.
605. $y''' - 8iy = \cos 2x$. 606. $y'' - \frac{2y}{x^2} = 3\ln(-x)$.
607. $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}$.
608. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(\cos^2 x + \mathrm{tg}\,x)$.
609. $x^2y'' - 2y = \frac{3x^2}{x+1}$.
610. $x^2y'' - xy' + y = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x}$. 611*. $y'' + y = f(x)$.

612*. Какие условия достаточно наложить на функцию $f(x)$, чтобы все решения уравнения задачи **611** оставались ограниченными при $x \to +\infty$?

В задачах **613—618** построить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющие данные частные решения.

613. $y_1 = x^2e^x$. 614. $y_1 = e^{2x}\cos x$.
615. $y_1 = x\sin x$. 616. $y_1 = xe^x\cos 2x$.
617. $y_1 = xe^x$, $y_2 = e^{-x}$. 618. $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$.

619. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ ограничены на всей числовой оси $-\infty < x < \infty$?

620. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$?

621. При каких a и b уравнение $y'' + ay' + by = 0$ имеет хотя бы одно решение $y(x) \not\equiv 0$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$?

622. При каких a и b каждое решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$, кроме решения $y(x) \equiv 0$, монотонно возрастает по абсолютной величине, начиная с некоторого x?

623. При каких a и b каждое решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$ обращается в нуль на бесконечном множестве точек x?

624*. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ удовлетворяют соотношению $y = o(e^{-x})$ при $x \to +\infty$?

625*. Для заданного $b > 0$ подобрать такое a, при котором решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ возможно быстрее стремится к нулю при $x \to +\infty$.

626. При каких k и ω уравнение $y'' + k^2 y = \sin \omega t$ имеет хотя бы одно периодическое решение?

627. Найти периодическое решение уравнения $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \sin \omega t$ и нарисовать график зависимости его амплитуды от величины ω.

628. Найти периодическое решение уравнения $\ddot{x} + \dot{x} + 4x = e^{i\omega t}$ и на комплексной плоскости начертить кривую, которую пробегает амплитудный множитель этого решения при изменении ω от 0 до $+\infty$.

629*. Дано уравнение $y'' + ay' + by = f(x)$, причем $|f(x)| \leqslant m (-\infty < x < \infty)$, а корни характеристического уравнения $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Найти решение, ограниченное при $-\infty < x < \infty$. Показать, что а) все остальные решения неограниченно приближаются к этому решению при $x \to +\infty$, б) если $f(x)$ периодическая, то это решение тоже периодическое.

Указание. Применить метод вариации постоянных. Нижние пределы полученных интегралов взять бесконечными такого знака, чтобы интегралы сходились.

В задачах 630—632 принять, что при отклонении груза от положения равновесия на расстояние x пружина действует на него с силой kx, направленной к положению равновесия.

630. Найти период свободных колебаний массы m, подвешенной к пружине, если движение происходит без сопротивления.

631. Один конец пружины закреплен неподвижно, а к другому прикреплен груз массы m. При движении груза со скоростью v сила сопротивления равна hv.

При $t = 0$ грузу, находившемуся в положении равновесия, сообщена скорость v_0. Исследовать движение груза в случаях $h^2 < 4km$ и $h^2 > 4km$.

632. Решить предыдущую задачу при дополнительном условии, что к грузу приложена еще периодическая внешняя сила $f = b \sin \omega t$. Показать, что при любых начальных условиях движение груза будет приближаться к периодическому и найти это периодическое движение (вынужденные колебания).

633. На конце упругого стержня укреплена масса m. Другой конец стержня вибрирует так, что его смещение в момент t равно $B \sin \omega t$. Упругая сила, возникающая в стержне, пропорциональна разности смещений его концов. Найти амплитуду A вынужденных колебаний массы m. Может ли быть $A > B$? (Массой стержня и трением пренебречь.)

634. Частица массы m движется по оси Ox, отталкиваясь от точки $x = 0$ с силой $3mr_0$ и притягиваясь к точке $x = 1$ с силой $4mr_1$, где r_0 и r_1 — расстояния до этих точек. Определить движение частицы с начальными условиями

$$x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

635. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянного тока, дающего напряжение V, сопротивления R, самоиндукции L и выключателя, который включается при $t = 0$. Найти зависимость силы тока от времени (при $t > 0$).

636. Решить предыдущую задачу, заменив самоиндукцию L конденсатором емкости C. Конденсатор до замыкания цепи не заряжен.

637. Последовательно включены сопротивление R и конденсатор емкости C, заряд которого при $t = 0$ равен q. Цепь замыкается при $t = 0$. Найти силу тока в цепи при $t > 0$.

638. Последовательно включены самоиндукция L, сопротивление R и конденсатор емкости C, заряд которого при $t = 0$ равен q. Цепь замыкается при $t = 0$. Найти силу тока в цепи и частоту колебаний в том случае, когда разряд носит колебательный характер.

639. Последовательно включены источник тока, напряжение которого меняется по закону $E = V \sin \omega t$, сопротивление R и самоиндукция L. Найти силу тока в цепи (установившийся режим).

640. Последовательно включены: источник тока, напряжение которого меняется по закону $E = V \sin \omega t$, сопротивление R, самоиндукция L и емкость C. Найти силу тока в цепи (установившийся режим). При какой частоте ω сила тока наибольшая?

§ 12. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Большинство задач этого параграфа решается с помощью методов общей теории линейных дифференциальных уравнений (см. [1], гл. V, § 2, § 3 или [4], гл. 2, § 3, § 5) и методов качественного исследования линейных уравнений второго порядка (см. [1], гл. VI, § 2, п. 1, п. 3). К остальным задачам даны указания или ссылки на литературу.

2. Если известно частное решение y_1 линейного однородного уравнения n-го порядка, то порядок уравнения можно понизить, сохраняя линейность уравнения. Для этого в уравнение надо подставить $y = y_1 z$ и затем понизить порядок заменой $z' = u$.

Чтобы найти общее решение линейного однородного уравнения второго порядка $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, у которого известно одно частное решение y_1, можно понизить порядок уравнения указанным выше способом. Однако удобнее воспользоваться формулой Остроградского — Лиувилля:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)\,dx}, \quad p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)},$$

где y_1 и y_2 — любые два решения данного уравнения.

Пример. Пусть известно частное решение $y_1 = x$ уравнения

$$(x^2+1)\,y'' - 2xy' + 2y = 0. \qquad (1)$$

По формуле Остроградского — Лиувилля получим

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)dx}; \quad y_1y_2' - y_1'y_2 = C(x^2+1).$$

Так как функция y_1 известна, то мы получили линейное уравнение первого порядка относительно y_2. Проще всего оно решается следующим способом. Разделив обе части уравнения на y_1^2, получим слева производную от дроби y_2/y_1:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{C(x^2+1)}{y_1^2}.$$

Так как $y_1 = x$, то

$$\frac{y_2}{y_1} = \int C\cdot\frac{x^2+1}{x^2}\,dx + C_2 = C\left(x - \frac{1}{x}\right) + C_2;$$

$$y_2 = C(x^2-1) + C_2x.$$

Это — общее решение уравнения (1).

3. Общего метода для отыскания частного решения линейного уравнения второго порядка не существует. В некоторых случаях решение удается найти путем подбора.

Пример. Найти частное решение уравнения

$$(1-2x^2)\,y'' + 2y' + 4y = 0, \qquad (2)$$

являющееся алгебраическим многочленом (если такое решение существует).

Сначала найдем степень многочлена. Подставляя $y = x^n + \ldots$ в уравнение (2) и выписывая только члены с самой старшей степенью буквы x, получим: $-2x^2\cdot n(n-1)x^{n-2} + \ldots + 4x^n + \ldots = 0$. Приравнивая нулю коэффициент при старшей степени x, получим: $-2n(n-1) + 4 = 0$; $n^2 - n - 2 = 0$. Отсюда $n_1 = 2$; корень $n_2 = -1$ не годен (степень многочлена — целое положительное число). Итак, многочлен может быть только второй степени. Ищем его в виде $y = x^2 + ax + b$. Подставляя в уравнение (2), получим $(4a+4)x + 2 + 2a + 4b = 0$. Следовательно, $4a + 4 = 0$, $2 + 2a + 4b = 0$. Отсюда $a = -1$, $b = 0$. Итак, многочлен $y = x^2 - x$ является частным решением.

4. При решении задач **738—750** воспользоваться следующими утверждениями, вытекающими, например, из § 7 гл. V книги [5].

Пусть $|f(t)| \leqslant \dfrac{c}{t^{1+a}}$ при $t_0 \leqslant t < \infty$; $c, a = \mathrm{const} > 0$.

Тогда

1) уравнение $u'' + (1 + f(t))u = 0$ имеет два таких линейно независимых решения, что при $t \to +\infty$

$$u_1(t) = \cos t + O\left(\frac{1}{t^a}\right), \quad u_2(t) = \sin t + O\left(\frac{1}{t^a}\right);$$

2) уравнение $u'' - (1 - f(t))u = 0$ имеет два таких линейно независимых решения, что при $t \to +\infty$

$$u_1(t) = e^t\left(1 + O\left(\frac{1}{t^a}\right)\right), \quad u_2 = e^{-t}\left(1 + O\left(\frac{1}{t^a}\right)\right).$$

В задачах **641—662** исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми. В каждой задаче функции рассматриваются в той области, в которой они все определены.

641. $x+2,\ x-2.$

642. $6x+9,\ 8x+12.$

643. $\sin x,\ \cos x.$

644. $1,\ x,\ x^2.$

645. $4-x,\ 2x+3,\ 6x+8.$

646. $x^2+2x,\ 3x^2-1,\ x+4.$

647. $x^2-x+3,\ 2x^2+x,\ 2x-4.$

648. $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}.$

649. $x,\ e^x,\ xe^x.$

650. $1,\ \sin^2 x,\ \cos 2x.$

651. $\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ 2+e^x.$

652. $\ln(x^2),\ \ln 3x,\ 7.$

653. $x,\ 0,\ e^x.$

654. $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $2e^x - 1$, $3e^x + 5$.

655. 2^x, 3^x, 6^x. **656.** $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$.

657. $\sin x$, $\sin(x+2)$, $\cos(x-5)$.

658. $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{x+2}$.

659. $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, 1. **660.** x^2, $x\,|x|$.

661. x, $|x|$, $2x+\sqrt{4x^2}$. **662.** x, x^3, $|x^3|$.

663. а) Являются ли линейно зависимыми на отрезке $[a, b]$ функции, графики которых изображены на рис. 1? б) Тот же вопрос для рис. 2.

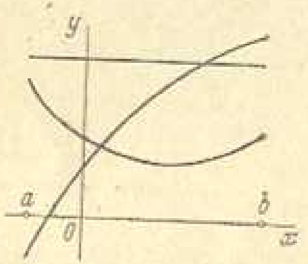

Рис. 1.

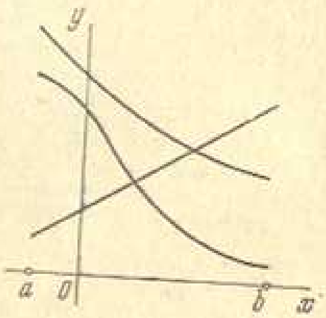

Рис. 2.

664. Известно, что для функций $y_1, \ldots, y_n$ детерминант Вронского в точке x_0 равен нулю, а в точке x_1 не равен нулю. Можно ли что-нибудь сказать о линейной зависимости (или независимости) этих функций на отрезке $[x_0, x_1]$?

665. Детерминант Вронского для функций $y_1, \ldots, y_n$ равен нулю при всех x. Могут ли быть эти функции линейно зависимыми? Линейно независимыми?

666. Что можно сказать о детерминанте Вронского функций $y_1, \ldots, y_n$, если только известно, а) что они линейно зависимы? б) что они линейно независимы?

667. Функции $y_1 = x$, $y_2 = x^5$, $y_3 = |x^5|$ удовлетворяют уравнению $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$. Являются ли они линейно зависимыми на интервале $(-1, 1)$? Объяснить ответ.

668. Доказать, что два решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (с непрерывными коэффициентами), имеющие максимум при одном и том же значении x, линейно зависимы.

669. Даны 4 решения уравнения $y''' + xy = 0$, графики которых касаются друг друга в одной точке. Сколько линейно независимых имеется среди этих решений?

670. Пользуясь известным утверждением об интервале существования решения линейного уравнения ([1], гл. V, конец § 1), определить на каком интервале существует решение данного уравнения с указанными начальными условиями (не решая уравнения): а) $(x+1)y'' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. б) $y'' + y \operatorname{tg} x = 0$, $y(5) = 1$, $y'(5) = 0$.

671. Могут ли графики двух решений уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$ (с непрерывными коэффициентами) на плоскости x, y а) пересекаться, б) касаться друг друга?

672. При каких n уравнение задачи **671** может иметь частное решение $y = x^3$?

673. Линейное однородное уравнение какого порядка на интервале $(-1, 1)$ может иметь такие четыре частных решения: $y_1 = x^2 - 2x + 2$, $y_2 = (x-2)^2$, $y_3 = x^2 + x - 1$, $y_4 = 1 - x$?

В каждой из задач **674—680** составить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее данные частные решения.

674. 1, $\cos x$. **675.** x, e^x. **676.** $3x$, $x-2$, e^x+1.

677. $x^2 - 3x$, $2x^2+9$, $2x+3$. **678.** e^x, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$.

679. x, x^2, e^x. **680.** x, x^3, $|x^3|$.

В задачах **681—701** найти общие решения данных уравнений, зная их частные решения. В тех задачах, где частное решение не дано, можно искать его путем подбора, например, в виде показательной функции $y_1 = e^{ax}$ или алгебраического многочлена $y_1 = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$

681. $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$.

682. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0$; $y_1 = 1 + \frac{1}{x}$.

683. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$.

684. $xy'' + 2y' - xy = 0$; $y_1 = \frac{e^x}{x}$.

685. $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0$; $y_1 = \operatorname{tg} x$.

686. $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$.

687. $(e^x+1)y'' - 2y' - e^xy = 0$; $y_1 = e^x - 1$.

688. $x^2y''\ln x - xy' + y = 0$.

689. $y'' - y'\operatorname{tg} x + 2y = 0;\ y_1 = \sin x$.

690. $(x^2-1)y'' + (x-3)y' - y = 0$.

691. $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0$.

692. $y'' + 4xy' + (4x^2+2)y = 0;\ y_1 = e^{ax^2}$.

693. $xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0$.

694. $x(2x+1)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 0$.

695. $x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = 0$.

696. $x(x^2+6)y'' - 4(x^2+3)y' + 6xy = 0$.

697. $(x^2+1)y'' - 2y = 0$.

698. $2x(x+2)y'' + (2-x)y' + y = 0$.

699. $xy''' - y'' - xy' + y = 0;\ y_1 = x,\ y_2 = e^x$.

700. $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0;$

$$y_1 = x,\ y_2 = 1/x.$$

701. $(x^2-2x+3)y''' - (x^2+1)y'' + 2xy' - 2y = 0;$

$$y_1 = x,\ y_2 = e^x.$$

В задачах 702, 703 найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения является многочленом.

702. $(x+1)xy'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x}$.

703. $(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + x$.

В задачах 704, 705, зная два частных решения линейного неоднородного уравнения второго порядка, найти его общее решение.

704. $(x^2-1)y''+4xy'+2y=6x;\ y_1=x,\ y_2=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

705. $(3x^3+x)y''+2y'-6xy=4-12x^2;$

$$y_1=2x,\ y_2=(x+1)^2.$$

В уравнениях 706—710 линейной заменой искомой функции $y=a(x)z$ уничтожить член с первой производной.

706. $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=0$.

707. $x^2y''-4xy'+(6-x^2)y=0$.

708. $(1+x^2)y''+4xy'+2y=0$.

709. $x^2y''+2x^2y'+(x^2-2)y=0$. 710. $xy''+y'+xy=0$.

В уравнениях 711—715 заменой независимого переменного $t=\varphi(x)$ уничтожить член с первой производной.

711. $xy''-y'-4x^3y=0$. 712. $(1+x^2)y''+xy'+y=0$.

713. $x^2(1-x^2)y''+2(x-x^3)y'-2y=0$.

714. $y''-y'+e^{4x}y=0$. 715. $2xy''+y'+xy=0$.

716. Зная три частных решения $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=x^2$ линейного неоднородного уравнения второго порядка, написать его общее решение.

717. Что можно сказать о функции $p(x)$, если известно, что все решения уравнения $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ при $x\to+\infty$ стремятся к нулю вместе со своими первыми производными?

Указание. Воспользоваться формулой Лиувилля.

718. Доказать, что в случае $q(x)<0$ решения уравнения $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ не могут иметь положительных максимумов.

719. Где могут лежать точки перегиба графиков решений уравнения $y''+q(x)y=0$?

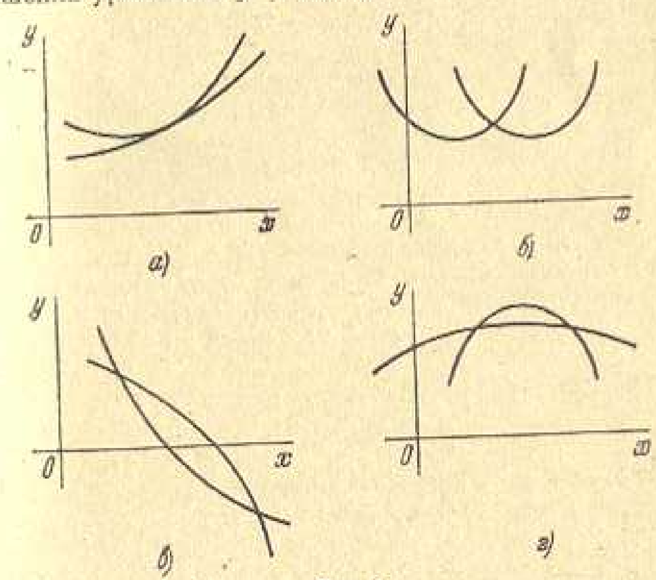

Рис. 3

720. Могут ли графики двух решений уравнения $y''+q(x)y=0$ (функция $q(x)$ непрерывна) располагаться так, как на рис. 3а? рис. 3б? рис. 3в? рис. 3г?